A

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 24 FEBBRAIO 2011

1.
1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e avente massimo assoluto uguale a 2..
1.2 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia insieme immagine]0, 10[.
1.3 Fare l'esempio di una funzione discontinua in x=1 con discontinuità non eliminabile.

2. Riconoscere quante soluzioni ha l'equazione:

$$\arctan\frac{x-1}{x+1}=\frac{\pi}{6}$$

Si tratta di riconoscere se e quante volte il grafico della funzione $f(x)=\arctan\frac{x-1}{x+1}$ incontra la retta di equazione $y=\frac{\pi}{6}$.

Vediamo di tracciare il grafico di f(x): naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo.
La funzione è definita per $x\neq -1$. Vediamo segno e intersezioni con gli assi:

$$f(0)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$f(x)>0 \text{ per } \frac{x-1}{x+1}>0$$

cioè per $x>1$ e $x<-1$. Inoltre $f(x)=0$ per $x=1$.
Quindi studiamo il comportamento di f solo in tali intervalli, dato che solo in tali intervalli ci potranno essere delle intersezioni.
Vediamo i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x-1}{x+1}=\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x-1}{x+1}$$

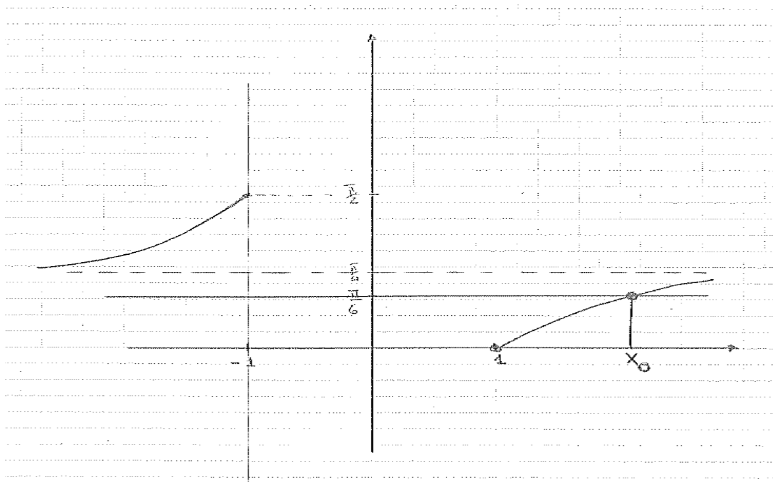
$$\lim_{x\to-1^-}\arctan\frac{x-1}{x+1}=\frac{\pi}{2}$$

Studiamo la monotonia della funzione:

$$f'=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{2}{(x+1)^2}$$

Negli intervalli che ci interessano f è sempre crescente.
A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico di f nella parte di piano che ci interessa:

A



Il grafico di f incontrerà la retta di equazione $y = \dfrac{\pi}{6}$ in un solo punto di ascissa x_0, con $x_0 > 1$: x_0 sarà l'unica soluzione dell'equazione data.

3.
Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1,1]$. In caso affermativo trovare un punto x_o che ha le proprietà descritte nell'enunciato.

$$f(x) = \begin{cases} \log\sqrt{1+x^2} & x > 0 \\ \\ x^2 + x & x \le 0 \end{cases}$$

L'enunciato del teorema di Lagrange è il seguente:
Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b]. Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Le prime due ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].
La funzione data nell'intervallo $[-1,1]$ per $x > 0$ e per $x < 0$ è derivabile e continua in quanto composizione o somma di funzioni derivabili (e continue).
Si tratta quindi di verificare la continuità e la derivabilità in $x = 0$.
Per la continuità:

$$\lim_{x\to 0^+} \log\sqrt{1+x^2} = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-}(x^2 + x)$$

Quindi f è continua in $x = 0$. Vediamo la derivabilità:

Per $x > 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} 2x = \dfrac{x}{1+x^2}$

Per $x < 0$ $f'(x) = 2x + 1$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$, e quindi non verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1,1]$.

A

4. Trovare l’area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione f e dall’asse x, nell’intervallo indicato:

$f(x) = \frac{1}{x^2}\log x$ in $[\frac{1}{e}, 1]$

Nell'intervallo dato la funzione è negativa perché $\log x < 0$. Quindi l'area sarà data da:

$$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x^2}\log x dx$$

Calcolo l'integrale indefinito per parti:

$$\int \frac{1}{x^2}\log x dx = -\frac{1}{x}\log x - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{x}\log x - \frac{1}{x} + C$$

Quindi:

$$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x^2}\log x dx = \left[\frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = 1 - (e\log\frac{1}{e} + e) = 1 + e - e = 1$$