B

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 24 FEBBRAIO 2011

1.

1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e avente periodo 8.
1.2 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia minimo assoluto uguale a 3.
1.3 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e non derivabile in x = 2.

2. Riconoscere quante soluzioni ha l'equazione:

$$\log\sqrt{1+x^2} = -x^2+1$$

Si tratta di riconoscere quante intersezioni hanno i grafici delle funzioni $f(x)=\log\sqrt{1+x^2}$ e $g(x)=-x^2+1$.

Il grafico della funzione *g* lo conosciamo.
Vediamo di tracciare il grafico di f(x): naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).
La funzione è definita su tutto R, ed è pari. Vediamo segno e intersezioni con gli assi:

$$f(0)=0$$

$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}\geq 1 \text{ sempre}$$

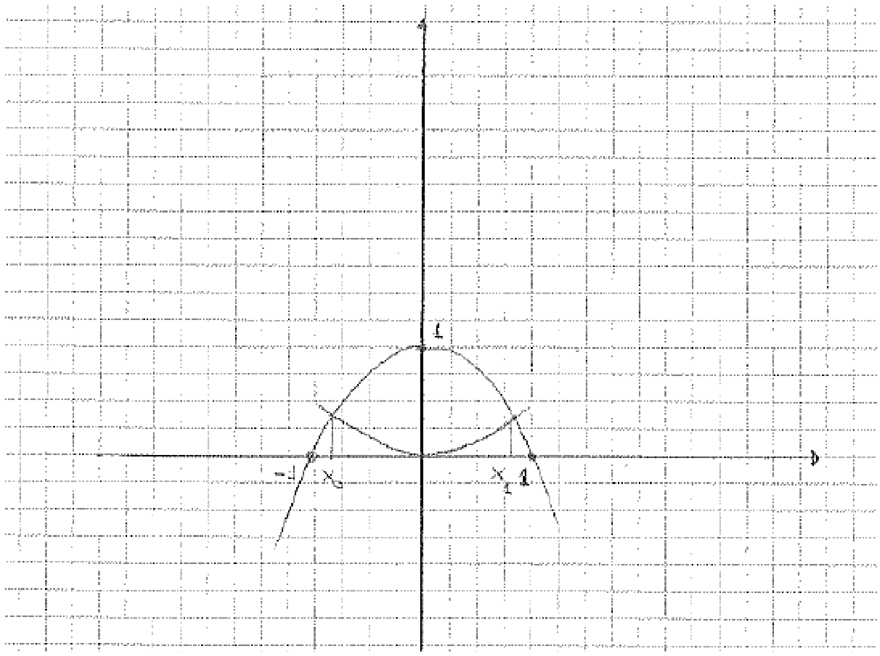
Quindi se i due grafici si intersecano, lo fanno nell'intervallo [-1, 1], dove anche *g* è positiva.
Studiamo la monotonia di f:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x=\frac{x}{1+x^2}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log\sqrt{1+x^2} == \lim_{x\to-\infty}\log\sqrt{1+x^2}=+\infty$$

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico di f nella parte di piano che ci interessa:



B

I due grafici si incontreranno in due punti di ascissa x_0 e x_1, con $-1 < x_0 < 0$ e $0 < x_1 < 1$: x_0 e x_1 saranno le due soluzioni dell'equazione data.

3. Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,1]$.
In caso affermativo trovare un punto x_o che ha le proprietà descritte nell'enunciato.
$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$
L'enunciato del teorema di Lagrange è il seguente:
Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b]. Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Le prime due ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].
La funzione data è derivabile e continua in ogni intervallo in quanto è un polinomio.
Quindi dobbiamo trovare x_0 tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(0)}{1}$$

$f(0) = 1$ e $f(1) = 3$
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$
Dobbiamo quindi risolvere l'equazione:
$3x^2 + 4x - 1 = 2$
cioè:
$3x^2 + 4x - 3 = 0$
Troviamo come unica soluzione accettabile (in quanto appartenente all'intervallo $[0,1]$):

$$x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$$

4. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x} y = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$y' = -\frac{1}{x} y + x^2$$

è lineare del tipo:
$y' = a(x)y + b(x)$
dove: $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ e $b(x) = x^2$
l'integrale generale è:
$y(x) = e^{A(x)}(\int e^{-A(x)} b(x)dx + C)$, dove *A(x)* è una primitiva di *a(x)*.
Quindi:
$A(x) = -\log|x|$ e otteniamo:

$$y(x) = e^{-\log|x|}(\int e^{\log|x|} x^2 dx + C)$$

$$y(x) = \frac{1}{|x|}(\int |x| x^2 dx + C)$$

B

$$y(x) = \frac{1}{x}(\int x^3 dx + C)$$

$$y(x) = \frac{1}{x}(\frac{x^4}{4} + C)$$

imponiamo che $y(1) = 0$:

$0 = \frac{1}{4} + C$ quindi $C = -\frac{1}{4}$. Otteniamo la soluzione:

$$y(x) = \frac{1}{x}(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4})$$