MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B

COMPITINO 3 FILA A — SOLUZIONI

PROF. MARCO ABATE

30 marzo 2007

1. Parte I

Esercizio 1.1. *Stabilire (giustificando la risposta) se la funzione $f(x) = x^3 + 2x$ è crescente o meno.*

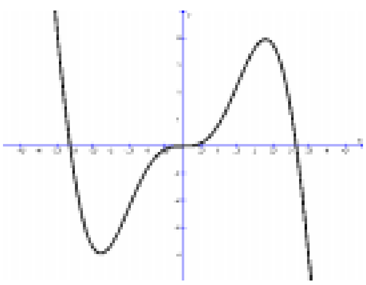
La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e qui derivabile. Quindi se ha derivata prima maggiore di zero ovunque è crescente. Calcolando la derivata, si ottiene

$$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione è crescente.

Esercizio 1.2. *Stabilire (giustificando la risposta) quale delle seguenti funzioni può avere un grafico come quello in figura:*

(1) $x \cos x$;
(2) $x^2 \cos x$;
(3) $x \sin x$;
(4) $x^2 \sin x$.



Per risolvere questo esercizio sono possibili molte vie differenti. Ne presentiamo una. Il grafico rappresentato in figura è simmetrico rispetto all'origine, ovvero la funzione rappresentata è dispari ($f(-x) = -f(x)$, per ogni $x \in D$). Solo le funzioni (1) e (4) sono dispari, mentre (2) e (3), essendo pari, vanno escluse[1].

Resta ora da stabilire quale fra $f_1(x) = x \cos x$ e $f_4(x) = x^2 \sin x$ è la funzione rappresentata. Calcolando le derivate prime, si ottiene:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \cos x - x \sin x, \\ f_4(x) &= 2x \sin x + x^2 \cos x. \end{aligned}$$

Nell'origine il grafico ha tangente orizzontale; quindi la funzione cercata deve avere derivata nulla in 0. Siccome $f_1'(0) = 1$ e $f_4'(0) = 0$, si conclude che la funzione rappresentata è la (4), $x^2 \sin x$.

[1] Ricordiamo che x e $\sin x$ sono funzioni dispari, mentre x^2 e $\cos x$ sono funzioni pari. Il prodotto di due funzioni con la stessa parità è pari, quello di due funzioni una pari e una dispari è dispari.

Esercizio 1.3. *Calcolare il seguente integrale definito:*

$$\int_0^1 (4x^3+1)dx \tag{1}$$

Ricordando che per le proprietà degli integrali

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b f'(x)dx = f(x)|_a^b = f(a) - f(b),$$

e che

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1},$$

si ottiene

$$\int_0^1 (4x^3+1)dx = \int_0^1 4x^3 dx + \int_0^1 1dx = x^4\big|_0^1 + x|_0^1 = 1^4 - 0^4 + 1 - 0 = 2.$$

2. Parte II

Esercizio 2.1. *Ipotesi biologiche sulla crescita di una popolazione di batteri suggeriscono che il numero $N(x)$ di individui nella popolazione al tempo x segua un andamento dato da:*

$$N(x) = \frac{2e^x}{x+1} \tag{2}$$

Studia la funzione $N(x)$ (anche per $x<0$) disegnandone il grafico.

Dominio. L'unica cosa da escludere è che si annulli il denominatore. Pertanto $x+1 \neq 0$, ovvero $x \neq -1$ e il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Segno. Il numeratore è sempre positivo. Il segno di $N(x)$ è dato pertanto dal segno del denominatore. Ora, $x+1>0$ se e solo se $x>-1$. In $(-\infty,-1)$ $N(x)$ è negativa, in $(-1,+\infty)$ è positiva.

Limiti. I limiti da calcolare sono a $-\infty, -1^-, -1^+, +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{x+1} = \left[\frac{2e^{-\infty}}{-\infty+1}\right] = \left[\frac{0^+}{-\infty}\right] = 0^-.$$

$$\lim_{x\to-1^\pm} \frac{2e^x}{x+1} = \left[\frac{2e^{-1^\pm}}{-1^\pm+1}\right] = \left[\frac{2}{e\cdot 0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

Quindi la funzione ha un asintoto verticale per $x=-1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{x+1} = +\infty,$$

perchè sappiamo che l'esponenziale diverge all'infinito più velocemente di qualsiasi polinomio.

Crescenza. Per studiare la crescenza della funzione, studiamo il segno della derivata prima.

$$N'(x) = \frac{2e^x(x+1) - 2e^x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2xe^x}{(x+1)^2}.$$

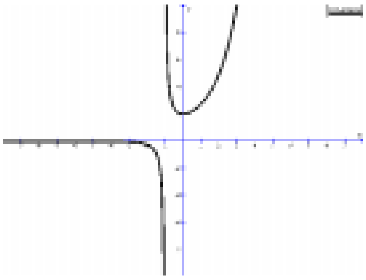
I fattori 2, e^x e $(x+1)^2$ sono sempre positivi in D. Pertanto il segno di $N'(x)$ è dato dal segno di x. Quindi $N(x)$ è decrescente in $(-\infty,-1)$ e in $(-1,0]$; è crescente in $[0,\infty)$. Il punto 0 è un punto di minimo locale per la funzione, $N(0)=2$.

Concavità. Per studiare la concavità della funzione, studiamo il segno della derivata seconda.

$$N''(x) = \frac{(2e^x+2xe^x)(x+1)^2 - 2xe^x(2(x+1))}{(x+1)^4} = \frac{2e^x(1+x^2)}{(x+1)^3}.$$

I fattori 2, e^x e $1+x^2$ sono sempre positivi, pertanto il segno di $N''(x)$ è dato dal segno di $(x+1)^3$, ovvero di $x+1$. Quindi $N(x)$ è concava in $(-\infty,-1)$ e convessa in $(-1,+\infty)$.

Il grafico della funzione è rappresentato in figura.



Esercizio 2.2. *Trova la funzione lineare e quella quadratica che meglio approssimano nel punto $x=0$ la seguente funzione:*

$$f(x) = x\cos x.$$

Le migliori approssimazioni sono date dai polinomi di Taylor di primo e secondo grado. Calcolando le derivate prime e seconde di f si ha:

$$f'(x) = \cos x - x\sin x, \quad f''(x) = -2\sin x - x\cos x.$$

Pertanto $f'(0)=1$, e $f''(0)=0$, per cui la migliore approssimazione lineare è:

$$P_{1,f}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = x,$$

e la migliore approssimazione quadratica è

$$P_{2,f}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = x.$$

Esercizio 2.3. *Considera una variabile aleatoria X con funzione di distribuzione*

$$P\{X \le t\} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ t-\frac{1}{2} & \text{se } 1 \le t \le \frac{3}{2} \\ 1 & \text{se } t \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

Trova:

(1) *la densità di probabilità f_X;*
(2) *la media (valor medio, valore atteso) $E(X)$ di X;*
(3) *la varianza* $\mathrm{Var}(X)$ *di X.*

(1) Densità di probabilità e funzione di distribuzionesono legate tra loro dalla seguenti relazioni:

$$P\{X \le t\} = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx; \quad f_X = \frac{dP\{X \le t\}}{dt}$$

Pertanto,

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & se\ t < 0 \\ \frac{1}{2} & se\ 0 < t < 1 \\ 1 & se\ 1 < t < \frac{3}{2} \\ 0 & se\ t > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

(2) Il valor medio di una variabile aleatoria è dato da

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Pertanto,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x dx + \int_1^{\frac{3}{2}} x dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{7}{8}.$$

(3) La varianza di una variabile aleatoria è data da

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(x - \frac{7}{8} \right)^2 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{7}{8} \right)^2 dx \\ &= \left.\frac{\left(x - \frac{7}{8}\right)^3}{6}\right|_0^1 + \left.\frac{\left(x - \frac{7}{8}\right)^3}{3}\right|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{592}{3072} = \frac{37}{192}. \end{aligned}$$