MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

SOLUZIONI QUARTO SCRITTO

18 settembre 2007

1. Parte I

Esercizio 1.1. *Hai visto un vestito che ti piace, del costo di* 70 *Euro, in due negozi, ma hai deciso di aspettare i saldi per comprarlo. Nel periodo dei saldi il primo negozio abbassa di* 10 *Euro il prezzo del vestito e poi fa un ulteriore* 10% *di sconto alla cassa. Il secondo negozio, invece, abbassa del* 10% *i suoi prezzi e poi fa un'ulteriore sconto di* 10 *Euro alla cassa. In quale negozio ti conviene comprare il vestito? Perché?*

Nel primo negozio il prezzo finale (in Euro) è

$$P_1 = (70 - 10)\left(1 - \frac{10}{100}\right) = 60 \cdot 0.9 = 54.$$

Nel secondo negozio il prezzo finale (in Euro) è

$$P_2 = 70\left(1 - \frac{10}{100}\right) - 10 = 70 \cdot 0.9 - 10 = 63 - 10 = 53,$$

ovvero 1 Euro in meno. Conviene acquistare nel secondo negozio.

Esercizio 1.2. *Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sapendo che g è crescente, puoi concludere che f è crescente? Se sì, spiega perché; se no, fai un esempio.*

Non posso concludere che f è crescente. Esempio: $g(x) = -e^{-x}$, $f(x) = e^{-x}$. In questo caso g è crescente, $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma f è addirittura strettamente decrescente.

Esercizio 1.3. *Calcola il seguente integrale:*

$$\int_0^1 (e^x + x^2)\, dx\ .$$

Sfruttando le proprietà degli integrali troviamo

$$\int_0^1 (e^x + x^2) dx = \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 x^2 dx = e^x\big|_0^1 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = e - 1 + \frac{1}{3} = e - \frac{2}{3}\ .$$

2. Parte II

Esercizio 2.1. *Sei amici, Alberto, Beatrice, Carlo, Dario, Eleonora e Francesca, vanno al cinema. È disponibile un'unica fila libera, e i 6 chiedono alla cassiera di sedersi lì, uno a fianco all'altro.*

1. *Se la fila ha esattamente sei posti, in quanti modi diversi si possono sedere i sei amici?*
2. *Sapendo che Alberto è sulle stampelle e deve sedersi su un posto vicino al corridoio (il primo o l'ultimo), qual è la probabilità che i posti assegnati a caso dalla cassiera verifichino questa condizione?*
3. *Rispondi alle due domande precedenti, supponendo questa volta che la fila abbia sette posti.*

(1) La cassiera assegna ad Alberto uno dei 6 posti disponibili, quindi a Beatrice uno dei 5 posti rimanenti, e cosìvia. Quindi i sei amici si possono sedere in

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$$

modi diversi. In altre parole, stai calcolando il numero di possibili permutazioni di 6 oggetti (o presone).

(2) Ci sono due metodi alternativi per calcolare la probabilità richiesta.

Metodo difficile (sconsigliato, ma prova a seguire questo ragionamento per esercizio): trovi il numero di disposizioni in cui ad Alberto è stato assegnato il primo o l'ultimo posto dei 720 casi totali. La probabilità cercata è allora data dal quoziente "Casi favorevoli" su "casi totali".

Metodo facile: l'unica cosa che ci interessa è il posto a cui viene assegnato Alberto. Può essere assegnato a 6 posti (casi totali) e ci sono 2 posti vicino al corridoio (casi favorevoli). Quindi la probabilità cercata è $2/6 = 1/3$.

(3) Supponendo ora che ci siano 7 posti nella fila, osserviamo innanzitutto che per restare seduti uno a fianco all'altro, dovrà essere lasciato vuoto uno dei posti vicino al corridoio, il primo o l'ultimo.

(3.1) La cassiera decide se lasciare vuoto il primo o l'ultimo posto (2 possibilità), poi procede come prima per assegnare i posti. Quindi i sei amici si possono sedere in $2 \cdot 720 = 1440$ modi diversi.

(3.2) Come prima, puoi seguire la strada semplice o quella complicata. Quella semplice consiste nel notare che ci sono sei posti in cui può finire Alberto e solo uno di questi va bene (il primo o l'ultimo a seconda di quale posto la cassiera ha scelto di lasciare vuoto). Quindi la probabilità cercata è $1/6$.

Esercizio 2.2. *Un accurato studio teorico ti porta a supporre che il numero delle lepri della Patagonia su un'isola sufficientemente dotata di carote dipenda dal tempo secondo la funzione*

$$L(t) = a2^t + b \ ,$$

dove stiamo misurando il tempo in anni. Per verificare la tua ipotesi, porti 150 *lepri in un'isola deserta (tempo $t = 0$), e dopo tre anni (tempo $t = 3$) torni a contarle, scoprendo che sono* 500*. Determina a e b in accordo con questi dati. Quante lepri prevedi che ci saranno dopo altri tre anni (tempo $t = 6$)? Sotto quali ipotesi questa funzione descrive realisticamente il fenomeno? E per quanto tempo?*

Impostando le condizioni note, e risolvendo il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} 150 = a2^0 + b \ , \\ 500 = a2^3 + b \ , \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 50 \ , \\ b = 100 \ . \end{cases}$$

Pertanto la funzione della forma indicata in accodo con i dati è

$$L(t) = 50 \cdot 2^t + 100 \ ,$$

e per $t = 6$ si ottiene $L(6) = 50 \cdot 2^6 + 100 = 3300$.

Una crescita esponenziale di questo tipo è realistica solo se non ci sono fenomeni (quali la scarsità di cibo, la limitatezza dello spazio a disposizione, o la presenza di predatori) che contrastano una crescita illimitata della popolazione. In un perido inziale. quando la popolazione è piccola rispetto al cibo e allo spazio disponibile (e supponendo non ci siano predatori), una crescita esponenziale è credibile; ma da un certo punto non lo sarà più, in quanto inizieranno a intervenire fenomeni di saturazione (anche assumendo che le carote non costituiscano un problema — e prima o poi lo saranno — lo spazio sull'isola è limitato) che impediscono una crescita illimitata della popolazione.

Esercizio 2.3. *Studiando ulteriormente le lepri della Patagonia, vieni a scoprire che la funzione*

$$P(t) = 350 + 200\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

descrive meglio il numero degli animali presenti sull'isola. Studia la funzione $P(t)$ (anche per tempi negativi), tralasciando (se lo desideri) lo studio della convessità.

Dominio. L'unica cosa da verificare è che nella frazione non si annulli il denominatore $1+t^2$. Questo è sempre strettamente positivo, quindi non ci sono problemi: il dominio coincide con l'intera retta reale $\mathbb{R}$.

Parità. Notiamo che t compare sempre al quadrato nella funzione. Poiché $(-t)^2 = t^2$, la funzione è pari, e possiamo limitarci a studiarla per $t \geq 0$.

Limiti. La parità ci dice che il limite a $-\infty$ coincide con quello a $+\infty$ (se esiste). Osserviamo poi che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{1-1/t^2}{1+1/t^2} = \frac{\pi}{2} \ .$$

Siccome il seno è una funzione continua, il limite del seno è uguale al seno del limite; quindi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} P(t) &= 350 + 200\lim_{t\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = 350 + 200\sin\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\\ &= 350 + 200\sin\frac{\pi}{2} = 350 + 200 = 550 \ .\end{aligned}$$

Crescenza. Calcoliamo la derivata di P per studiarne la crescenza. Usando la formula per la derivazione di funzione composta troviamo

$$P'(t) = 200\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2} = 400\pi\frac{t}{(t^2+1)^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) \ .$$

Osserviamo che siccome

$$|t^2-1| \leq t^2+1$$

sempre con uguaglianza se e solo se $t=0$, l'argomento del coseno è compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, non vale mai $\pi/2$, e vale $-\pi/2$ solo in $t=0$. Quindi il coseno è sempre maggiore o uguale a zero, e si annulla solo in $t=0$.

Il fattore che moltiplica il coseno ha il segno del numeratore (il denominatore è sempre positivo), cioè il segno di t. Riassumendo, la funzione è crescente per $t>0$, decrescente per $t<0$, e ha un punto critico in $t=0$, che è necessariamente un minimo (assoluto, perché la funzione è monotona sia su $\mathbb{R}^+$ sia su $\mathbb{R}^-$). In particolare, $P(0) = 150$.

Convessità. Calcoliamo, per completezza, la derivata seconda di P:

$$\begin{aligned}P''(t) &= 400\pi\left[\frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right]\\ &= \frac{400\pi}{(t^2+1)^2}\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) - 2\pi t\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\right] \ .\end{aligned}$$

Evitiamo di proseguire nel (complicato) studio del segno di questa funzione; le informazioni che abbiamo già ci permettono però di dire qualcosa sulla convessità di P. Prima di tutto, osserviamo che P deve necessariamente essere convessa in un intorno di 0 (punto di minimo) e concava in un intorno dell'infinito (dove ha asintoti orizzontali raggiunti dal basso). Pertanto P ha almeno due flessi (uno per $t>0$ e uno per $t<0$).

Riuniamo tutte le informazioni ottenute nel grafico.