

MATEMATICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE
TERZO COMPITINO — TESTO B

9 giugno 2011

Nome e cognome

Matricola

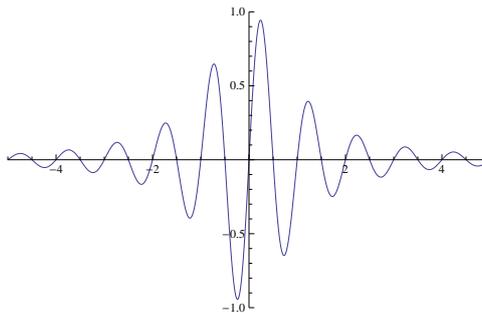
ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.

ISTRUZIONI: Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *Stabilisci (giustificando la risposta) quale delle funzioni seguenti può avere un grafico come quello in figura:*

- (a) $(1 + x) \sin(2\pi x)$;
- (b) $\frac{\sin(2\pi x)}{1+x}$;
- (c) $\frac{\sin(2\pi x)}{1+x^2}$;
- (d) $\frac{\cos(2\pi x)}{1+x^2}$.



Esercizio 1.2. *Determina il dominio e calcola la derivata della seguente funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{\log(1 - e^x)}.$$

Esercizio 1.3. *Determina il valore atteso della variabile aleatoria discreta X che misura il quoziente del risultato del lancio di due dadi a quattro facce non truccati distinti, dove il quoziente è calcolato dividendo il risultato del primo dado per il risultato del secondo.*

2. PARTE II

Esercizio 2.1. Sia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = -x^{2/3} \log x$.

- (i) Calcola l'integrale indefinito di f .
- (ii) Trova i punti critici di una qualsiasi primitiva F di f . [Suggerimento: Se F è una primitiva di f allora $F' = f$.]

Esercizio 2.2. Sia r la concentrazione di un reagente in una reazione chimica, che può avvenire solo se la concentrazione di questo reagente è strettamente inferiore a $4/\sqrt{e}$. Durante la reazione, la concentrazione varia secondo la funzione

$$r(t) = a \frac{te^{-t/4}}{2+t}$$

dove il tempo t è misurato in secondi, e $a > 0$ è una costante che dipende dalla temperatura ambientale.

- (i) Studia questa funzione, anche per tempi negativi, quando $a = 1$.
- (ii) Se $a = 2$, la reazione continua ad avvenire o si arresta dopo un tempo finito?
- (iii) Qual è il minimo valore di a al di sopra del quale la reazione a un certo punto si arresta? E per quel valore minimo di a , dopo quanto tempo la reazione si arresta?

Esercizio 2.3. Supponi che X sia una variabile aleatoria con funzione di distribuzione $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ data da

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0; \\ \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{10}t & \text{per } 0 \leq t \leq 2; \\ 1 & \text{per } t \geq 2. \end{cases}$$

Determina la densità di probabilità, il valore atteso e la varianza di X .