

ANNO ACCADEMICO 2013–14

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA

TERZO COMPITINO — TESTO A

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

6 giugno 2014

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_{-1}^2 (2x^3 - 4x) dx .$$

Esercizio 2. Determina, spiegando perché, se la seguente frase è vera o falsa: *La funzione $y(t) = e^{3t} - 2$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y' = 3y$.*

Esercizio 3. Un sottospazio vettoriale di dimensione 2 può contenere 3 vettori linearmente indipendenti? Se pensi che la risposta sia affermativa, fai un esempio; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. La densità di carica elettrica $q(x)$ in un neurone dipende dalla distanza x (misurata in μm) da un estremo dell'assone secondo la funzione

$$q(x) = x \sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right),$$

dove ℓ è la lunghezza del neurone. Determina la carica elettrica totale accumulata sul neurone. [*Suggerimento:* per passare dalla densità di carica alla carica totale occorre fare un integrale.]

Esercizio 5. Un recipiente contenente un liquido avente una concentrazione C di ioni di cloruro di sodio è messo a contatto tramite una membrana permeabile con un serbatoio di liquido in cui la concentrazione di ioni di cloruro di sodio è tenuta costantemente pari a C_s . In questa situazione, la variazione C' della concentrazione degli ioni nel recipiente, dovuta al trasferimento di ioni attraverso la membrana, è proporzionale alla differenza fra C_s e la concentrazione C .

- (i) Indicando con k la costante di proporzionalità, scrivi l'equazione differenziale soddisfatta dalla concentrazione C degli ioni nel recipiente.
- (ii) Sapendo che la concentrazione di ioni nel serbatoio è $C_s = 100 \text{ mol/m}^3$ e che la concentrazione iniziale di ioni nel recipiente è $C_0 = 20 \text{ mol/m}^3$, determina la concentrazione $C(t)$ degli ioni nel recipiente al tempo $t > 0$ supponendo che si abbia $k = 3$. Dopo quanto tempo la concentrazione raggiunge il valore $C_1 = 80 \text{ mol/m}^3$?
- (iii) Trova il valore di k sapendo che se la concentrazione di ioni nel serbatoio è $C_s = 200 \text{ mol/m}^3$ e la concentrazione iniziale di ioni nel recipiente è $C_0 = 140 \text{ mol/m}^3$ allora la concentrazione di ioni nel recipiente raggiunge il valore $C_1 = 170 \text{ mol/m}^3$ al tempo $t = 2 \log 2$.
- (iv) Determina, se esiste, il limite a cui tende la concentrazione $C(t)$ di ioni nel recipiente quando t tende all'infinito. Questo limite dipende dal valore di k ?

Esercizio 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ risolvi il seguente sistema lineare, trovando le soluzioni (quando esistono) in funzione di k :

$$\begin{cases} 2kx_2 + 6x_3 = 2 , \\ kx_1 + kx_2 = k , \\ 3x_2 + 3kx_3 = 3k . \end{cases}$$