

ANNO ACCADEMICO 2014–15

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA

TERZO COMPITINO — TESTO B

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

29 maggio 2015

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \sin x \, dx .$$

Esercizio 2. Determina, spiegando perché, se la seguente frase è vera o falsa: *La funzione $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-6t}}$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y' = 3y^3$.*

Esercizio 3. Esiste un $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11, \\ -9x - 6y = h, \end{cases}$$

ammette soluzione? Se pensi che la risposta sia affermativa, indica un valore di h per cui il sistema abbia soluzione, e descrivi tutte le soluzioni; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. In un modello matematico del nuoto di un pesce, la potenza Q necessaria per mantenere la velocità di nuoto v è data da

$$Q(v) = \frac{\alpha}{\rho v} + \beta \rho v^3 ,$$

dove ρ è la densità dell'aria e α e β sono due costanti dipendenti dalla forma dell'uccello.

- (i) Supponendo $\alpha = 48$ e $\beta = \rho = 1$, determina, se esiste, la velocità v_0 per cui la potenza è minima.
- (ii) Sempre supponendo $\alpha = 48$ e $\beta = \rho = 1$, se il pesce nuota per 1 minuto con una velocità $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$v(t) = \frac{e^t}{1 + e^{3t}} ,$$

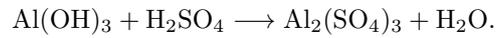
determina la potenza totale consumata dal pesce nuotando.

Esercizio 5. In un'isola dell'arcipelago Samoa viene introdotta una popolazione di gatti per contrastare l'espansione eccessiva di una popolazione preesistente di topi. Studi etologici mostrano come la variazione T' del numero di topi e la variazione G' del numero di gatti dipende dal numero T di topi e dal numero G di gatti presenti al tempo t misurato in anni nel modo seguente:

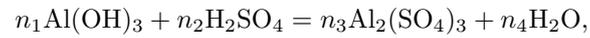
$$\begin{cases} T' = 11T - 3G, \\ G' = 3T + G. \end{cases}$$

- (i) Risolvi questo sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari.
- (ii) Supponendo che al tempo $t = 0$ sull'isola siano presenti 100 topi e vengano introdotti 10 gatti, descrivi cosa succede alle popolazioni di topi e gatti con il passare del tempo.
- (iii) Supponendo che al tempo $t = 0$ sull'isola siano presenti 100 topi e vengano introdotti 300 gatti, esiste un momento in cui la popolazione di topi si estingue?
- (iv) Supponendo che al tempo $t = 0$ sull'isola siano presenti 100 topi, qual è il minimo numero intero di gatti che devono essere introdotti al tempo $t = 0$ per essere certi che la popolazione di topi si estingua? E in questo caso in quanto tempo si estinguerà?

Esercizio 6. Bilancia la seguente reazione chimica, risolvendo esplicitamente un sistema lineare:



[*Suggerimento:* bilanciare questa reazione chimica significa trovare i più piccoli numeri naturali n_1 , n_2 , n_3 e n_4 per cui si abbia



dove l'uguaglianza significa che il numero di atomi di ciascun elemento è lo stesso sia a sinistra sia a destra dell'uguale.]