

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

SECONDO SCRITTO

18 Giugno 2008

Nome e cognome

Matricola

ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.

ISTRUZIONI: Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

1. PARTE I

Esercizio 1.1. Qual è la probabilità che, lanciando due dadi a sei facce non truccati, la somma dei risultati ottenuti sia un numero dispari?

Esercizio 1.2. Fai un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sia decrescente e tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Esercizio 1.3. Calcola la derivata della funzione

$$e^{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. Il colore del pelo di una razza canina è determinato geneticamente da un gene con tre alleli: l'allele "B" bianco, l'allele "N" nero e l'allele "F" fulvo. Gli alleli "B" e "N" sono dominanti sull'allele "F", mentre il genotipo "BN" corrisponde ad un pelo maculato. Supponendo che la popolazione soddisfi la legge di Hardy-Weinberg, e sapendo che il 21% dei cani hanno il pelo bianco, il 45% nero, il 4% fulvo e il 30% maculato, calcola le probabilità di tutti i possibili genotipi. Qual è la probabilità un cane abbia il pelo fulvo, sapendo che ce l'hanno anche entrambi i genitori? E sapendo che la madre ha il pelo fulvo mentre il padre non ha il pelo fulvo?

Esercizio 2.2. Fai parte di una spedizione scientifica per studiare le balene nel mare del nord e misuri la lunghezza L (in metri) di una giovane megattera in funzione del tempo t (misurato in settimane). Ottieni i risultati:

$$(t = 1, L = 2) \quad (t = 2, L = 4) \quad (t = 3, L = 6) \quad (t = 4, L = 9).$$

Ipotizzando che la lunghezza della megattera dipenda linearmente dal tempo trascorso, trova la retta che meglio approssima i tuoi dati. L'approssimazione è buona? Per quale intervallo di tempi ritieni che la tua ipotesi sia ragionevole?

Esercizio 2.3. Fai parte di un'altra spedizione scientifica nei laghi scozzesi con lo scopo di avvistare il famoso mostro di Lochness. Detta X la variabile aleatoria (continua) che corrisponde al tempo necessario per l'avvistamento del mostro, dopo un'accurata analisi degli avvistamenti passati ritieni che la funzione di distribuzione di X sia:

$$F_X(t) = p(\{X \leq t\}) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2e^t}{1+e^t} - 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- (1) Calcola la densità di probabilità f_X di X .
- (2) Studia la funzione f_X per valori non negativi del tempo.
- (3) Determina il valore atteso del tempo di avvistamento del mostro.