

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

TERZO SCRITTO

15 Luglio 2008

Nome e cognome

Matricola

ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.

ISTRUZIONI: Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense. . . Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *Un gregge è composto per il 60% da pecore e per la parte restante da capre. Dopo un'attenta analisi di mercato, il pastore decide di aumentare del 10% per cento il numero delle pecore e di ridurre del 20% quello delle capre. Di quanto cambia in percentuale la popolazione totale del gregge rispetto alla popolazione iniziale?*

Esercizio 1.2. *Fai un esempio di funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$f(0) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Esercizio 1.3. *Calcola la seguente derivata:*

$$\frac{d}{dx} x \log(x^2 + 1) .$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. La lunghezza del collo di una razza di giraffe è determinata geneticamente da un gene con due alleli: l'allele "L" dominante del collo lungo e l'allele "m" recessivo del collo molto lungo. Supponendo che la popolazione soddisfi le ipotesi della legge di Hardy-Weinberg, e che il 65% della popolazione abbia il collo lungo e il 35% abbia il collo molto lungo, calcola

- (i) le probabilità dei singoli alleli e di tutti i genotipi;
- (ii) la probabilità che una giraffa figlio abbia il collo molto lungo sapendo che entrambi i genitori hanno il collo lungo;
- (iii) la probabilità che una giraffa figlio abbia il collo lungo sapendo che entrambi i genitori hanno il collo molto lungo.

Esercizio 2.2. Inietti in una popolazione di cellule di girasole una quantità fissata di una certa sostanza. Sei interessato a studiare la densità di sostanza presente nella cellula in funzione del raggio della cellula. Misuri tre cellule della tua popolazione e ottieni le seguenti coppie di dati:

$$(10 \mu\text{m}, 96 \text{ g/cm}^3) ; (15 \mu\text{m}, 28 \text{ g/cm}^3) ; (20 \mu\text{m}, 12 \text{ g/cm}^3) .$$

Supponendo che la dipendenza della densità dal raggio della cellula sia di tipo quadratico, trova la funzione quadratica che rappresenta i tuoi dati. Per quali raggi la funzione trovata è sensata? Hai proposte alternative per una funzione che descriva il fenomeno studiato?

Esercizio 2.3. Dopo un viaggio in Egitto, il tuo assistente ha ipotizzato che il volume V della gobba di un dromedario possa dipendere dalla quantità media u di acqua bevuta secondo la legge

$$V(u) = \frac{2e^{2u} + 4}{(e^u + 1)(e^u + 3)} ,$$

dove V e u sono espressi in opportune unità di misura scelte dal tuo assistente. Studia questa funzione, anche per $u < 0$, tralasciando (se lo desideri) l'esame della derivata seconda, e descrivi cosa questo modello ti suggerisce sulla fisiologia dei dromedari.