

MATEMATICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

SECONDO SCRITTO

21 luglio 2010

Nome e cognome

Matricola

ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.

ISTRUZIONI: Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *Se un dado a sei facce non truccato viene lanciato tre volte, qual è la probabilità di ottenere 6 almeno una volta? E quante volte devi lanciare il dado perché la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore del 90%? [Per rispondere a questa domanda ti possono essere utili i seguenti conti: $\text{Log } 2 \simeq 0.3$, $\text{Log } 3 \simeq 0.48$, $\text{Log } 4 \simeq 0.6$, $\text{Log } 5 \simeq 0.7$, $\text{Log } 6 \simeq 0.78$, dove Log è il logaritmo in base 10.]*

Esercizio 1.2. *Determina il valore del seguente limite:*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2\sqrt{x}}{3x + \sqrt{x}}.$$

Esercizio 1.3. *Calcola la derivata della funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$f(x) = \int_1^x \sqrt{\log(1 + t^7)} dt.$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. Il colore degli occhi di una specie di pipistrelli della frutta è determinata geneticamente da un gene con due possibili alleli: l'allele "A" dominante degli occhi azzurri e l'allele "r" recessivo degli occhi rossi. La popolazione che stai studiando soddisfa le ipotesi della legge di Hardy-Weinberg, e sai che il 60% degli alleli nella popolazione sono "A", e il 40% sono "r". Qual è la probabilità che un pipistrello preso a caso nella popolazione abbia gli occhi rossi

- (i) non avendo nessun'altra informazione?
- (ii) sapendo che il padre ha gli occhi azzurri e la madre gli occhi rossi?
- (iii) sapendo soltanto che il padre ha gli occhi azzurri?
- (iv) sapendo soltanto che la madre ha gli occhi rossi?
- (v) sapendo che il padre e la madre hanno gli occhi rossi?

Esercizio 2.2. La numerosità di una specie animale in un territorio è stata stimata 6 anni fa in 12 400 unità. Oggi invece risulta essere di 13 100 individui. Supponendo che la legge che governa la crescita della specie sia

$$N(t) = N_0 e^{at},$$

dove il tempo t è misurato in anni a partire da oggi,

- (i) determina N_0 e a .
- (ii) In quanto tempo la popolazione supererà le 15 000 unità?
- (iii) Quanto tempo fa la popolazione era inferiore a 10 000 unità?

Esercizio 2.3. La temperatura (in gradi Celsius) di un liquido posto all'interno di un forno a microonde dipende dal tempo di esposizione alle microonde secondo la legge

$$T(t) = k \log \sqrt{\frac{4+t^2}{t+4}} + h,$$

dove t è misurato in minuti, e $k, h > 0$ sono delle costanti che dipendono dal tipo di forno.

- (i) Studia la funzione T (anche per tempi negativi, trascurando lo studio del segno della derivata seconda) con $k = 2$ e $h = 0$.
- (ii) Se $k = 2$ è possibile scegliere h in modo che la temperatura del liquido non sia mai negativa?
- (iii) In generale, fissato $k > 0$ quanto deve valere h in modo che la temperatura del liquido non sia mai negativa?
- (iv) È possibile scegliere h e k in modo che la temperatura del liquido non superi mai i $100^\circ C$?