Equazioni alle Deravate Parziali - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

(A.A. 2020/2021)

Assignement I, Scritto 11.01.2021

Problema 1. *Sia $u(x)$ una funzione in $C^2(\mathbb{R}^3)$ che soddisfa le condizioni*

- $u(x) \to 0$ *per* $|x| \to \infty$;
- $u(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^3$ *;*
- $-\Delta u(x) = (1+|x|^2)^{-2} - u(x)^5 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Vedere per quali $p \in (1,\infty)$

$$u \in L^p(\mathbb{R}^3).$$

Idea della soluzione. Usando il principio di massimo si vede che

$$u(x) \le v(x)$$

dove v soddisfa

$$-\Delta v(x) = (1+|x|^2)^{-2}$$

Della formula di representazione di v si vede the $v(x) \sim |x|^{-1}$. Di nuovo principio di massimo imlpica $u(x) \ge \varepsilon v(x)$ con $\varepsilon > 0$ piccolo. Quindi

$$u(x) \sim |x|^{-1}$$

per $|x| \to \infty$. e quindi $u \in L^p$ con $p > 3$. □

II soluzione proposta Quattrocchi Filippo, 2021. Col principio del massimo si vede che

Sia $r = |x|$ e sia

$$v(r) = u(r) - \frac{C}{(1+r^2)^k}.$$

Si vede che

$$\Delta \frac{C}{(1+r^2)^k} = \frac{2Ck(-3+(2k-1)r^2)}{(1+r^2)^{-2-k}}. \tag{1}$$ $\boxed{\texttt{eq.Q1}}$

quindi scegliendo $k = 1/2 - \varepsilon$ con $\varepsilon \in (0, 1/2)$ troviamo

$$-\Delta v(r) \leq (1 + r^2)^{-2} - \frac{C(3+\varepsilon) r^2}{(1 + r^2)^{-2-1/2+\varepsilon/2}}.$$

Per $0 < \varepsilon < 1/2$ troviamo $C > 0$ INDEPENDENTE da ε tale che

$$(1 + r^2)^{-2} - \frac{C(3+\varepsilon) r^2}{(1 + r^2)^{-2-1/2+\varepsilon/2}} \leq 0, \qquad (2) \quad \boxed{\texttt{eq.Q2}}$$

per $r > 1$ e tale che $v(1) = u(1) - C/2^{1/2} \leq 0$. In fatti, per $r > 1$ abbiamo $r^2 \geq (1 + r^2)/2$ e quindi

$$\frac{C(3+\varepsilon) r^2}{(1 + r^2)^{-2-1/2+\varepsilon/2}} \geq 3C \frac{r^2}{(1 + r^2)^{-2-1/2+1/4}} \geq 3C \frac{1 + r^2}{2(1 + r^2)^{-2-1/2+1/4}} = \frac{3C}{2}(1+r^2)^{-5/4}$$

adesso é cbiaro che si trova $C > 0$ INDEPENDENTE da ε tale che

$$3C \frac{r^2}{(1 + r^2)^{-2-1/2+1/4}} \geq (1 + r^2)^{-2}$$

e quindi abbiamo (2) eq.Q2 per $r > 1$. Applicando il principio di massimo (debole) per il dominio $\{r > 1\}$ troviamo e quindi

$$u(r) \leq \frac{C}{(1 + r^2)^{-1/2+\varepsilon/2}}$$

con C independente da ε. Prendendo il limite $\varepsilon \to 0$, troviamo

$$u(r) \leq \frac{C}{(1 + r^2)^{-1/2}}, \quad r > 1. \qquad (3) \quad \boxed{\texttt{eq.Q3}}$$

Cosi troviamo

$$-\Delta u \geq (1 + |x|^2)^{-2} - \left(\frac{C}{(1 + r^2)^{-1/2}} \right)^5 = F(r).$$

Per stimare $u(r)$ dal basso usiamo la funzione

$$w(r) = u(r) - \frac{\delta}{(1 + r^2)^{1/2}}$$

e grazie a (1) troviamo

$$-\Delta v(r) \geq F(r) - \frac{3\delta}{(1+r^2)^{-5/2}}$$

Si trova $r_0 > 0$ abbastanza grande tale che

$$F(r) - \frac{3\delta}{(1+r^2)^{-5/2}} > 0$$

per $r > r_0$. Poi si trova $\delta > 0$ piccolo tale che

$$w(r_0) = u(r_0) - \frac{\delta}{(1+r_0^2)^{1/2}} > 0$$

e poi il principio di massimo debole per $\{r > r_0\}$ implica

$$w(r) \geq 0 \implies u(r) \geq \frac{\delta}{(1+r^2)^{1/2}}.$$

Da qui e dal (3) deduciamo che $u \in L^p$ se e solo se $p > 3$. $\square$

Remark 1. *Regole durante lo scritto:*

1. La videocamera deve essere sempre accesa

2. Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compitino i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO

3. Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;

4. Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.

5. Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.

6. La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.

7. Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario fará una foto. Solo dopo lo studente puó inviare la soluzione.