

**Equazioni alle Derivate Parziali - Corso di Laurea Magistrale in
Matematica**

(A.A. 2020/2021)

Assignment I, Scritto 8.02.2021

Problema 1. Sia $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, una soluzione debole dell'equazione

$$-\Delta u(x) - u(x) = F(x),$$

tale che $u(x) \geq 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^3$, $u(0) > 0$ e $F(x) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ con $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. Vedere se $u(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

Idea della soluzione. Sappiamo che la soluzione debole e forte, quindi $u \in H^1$.

Usando l'equazione

$$-\Delta u - u = F$$

ed il fatto che $F \in H^2$ implicano

$$\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} + \|F\|_{L^2}.$$

Usando l'ipotesi $F \in H^2 \subset L^2$ troviamo $u \in H^2$. Usiamo di nuovo la disequazione

$$\|\Delta u\|_{H^2} \lesssim \|u\|_{H^2} + \|F\|_{H^2}$$

e quindi $u \in H^4$. Usando di nuovo il Sobolev embedding

$$H^2(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n), \quad n = 3$$

e

$$H^4(\mathbb{R}^n) \subset C^2(\mathbb{R}^n), \quad n = 3$$

concludiamo che $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Applicazione del principio di massimo forte per dominio $|x| \leq R$ implica $u(x) > 0$ per $|x| \leq R$. La scelta di R ed arbitraria, quindi $u(x) > 0$ per ogni x .

□

Remark 1. *Regole durante lo scritto:*

1. *La videocamera deve essere sempre accesa*
2. *Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compito i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO*
3. *Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;*
4. *Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.*
5. *Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.*
6. *La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.*
7. *Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario farà una foto. Solo dopo lo studente può inviare la soluzione.*