

## 26 gennaio 2000

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{(\tan x)(x \log(1-x) + e^{x^2} - 1)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right).$$

2. Provare che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$0 < n!e - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1}.$$

Provare quindi che  $e$  è irrazionale.

3. Sia  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Provare che se  $f$  ammette derivata seconda in  $x$  allora il seguente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

esiste e coincide con  $f''(x)$ . Verificare che il viceversa non è sempre vero.

4. Sia  $f \in C^1([a, b])$ . Definiamo la lunghezza del grafico di  $f$  come

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Dimostrare che  $\ell(f)$  è sempre maggiore o uguale alla lunghezza del segmento tra i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .