

# Limiti di funzioni in due variabili

4 ottobre 2001

1. Dire per quali punti  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$  esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\sqrt{x^2 + |y \sin y|}}{(y+1)^2 e^y + \cos x + 1}.$$

2. Sia  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione tale che  $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = l$ . Verificare che allora si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) = l;$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(|x| + |y|) = l;$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(\max\{|x|, |y|\}) = l.$$

3. Verificare che vale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^6 + y^8}}{x^2 + y^2} = 0.$$

4. Sia  $f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dimostrare che il limite seguente non esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

nonostante che per ogni  $y \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$$

e per ogni  $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1.$$

5. Sia  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } |y| < x^2 \\ \frac{(|y|+x^2)^3}{|y|+y^2} & \text{se } ||y| \geq x^2 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Provare che  $f$  è continua nel punto  $(0, 0)$ .

6. Sia  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{(x^2 + y^2)(\sqrt{y^2 - |x|} + 1)}$$

dove  $D \subset \mathbf{R}^2$  è l'insieme dei punti dove questa espressione è ben definita.  
Provare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

7. Sia  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)(x-2)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x(x-2) & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Verificare che  $f$  è continua.