Analisi Matematica Due
Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

30 maggio 2002

1. Si consideri la successione di funzioni $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_k(x) = e^{-kx^2} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$$

e la serie associata $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

(a) Mostrare che la successione e la serie convergono puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(b) verificare che la successione converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ ma la serie non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$;

(c) verificare che la serie converge totalmente su ogni insieme del tipo $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$.

Soluzione. Per quanto riguarda la convergenza puntuale di f_k basta notare che per $x = 0$ si ha $f_k(x) = 0$ e quindi $f_k(x) \to 0$. Per $x \neq 0$ notiamo che $\sin(x/\sqrt{k})$ è limitato mentre e^{-kx^2} tende a zero e quindi $f_k(x) \to 0$. Dunque f_k converge puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$. Analogamente per quanto riguarda la serie notiamo che per $x = 0$ si ha $\sum_k f_k(0) = 0$ mentre per $x \neq 0$ si ha $\sum_k |f_k(x)| \leq \sum_k e^{-2kx^2} = \sum_k (e^{-x^2})^k < +\infty$ essendo la serie geometrica di ragione $e^{-x^2} < 1$.

Passiamo alla convergenza uniforme e totale. Innanzitutto si verifica facilmente che posto $g_k(x) = \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-kx^2}$ si ha $|f_k(x)| \leq |g_k(x)|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcolare il massimo di g_k è più facile, si ha infatti

$$g_k'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{2kx^2}{\sqrt{k}} \right) e^{-kx^2}$$

e posto $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ si nota che g_k ha massimo assoluto in x_k e minimo assoluto in $-x_k$ (la funzione è dispari). Si ha dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_k(x)| \leq |g_k(x)| \leq g_k(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2e}} \frac{1}{k}.$$

Dato che $1/k \to 0$ abbiamo mostrato che la successione f_k converge uniformemente a 0. Notiamo però che $1/k$ non è sommabile e questo ci fa sospettare che la serie $\sum_k f_k$ non sia totalmente convergente su $\mathbb{R}$. Si ha infatti:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| \geq f_k(x_k) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2k}} \right) e^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2e}} \frac{1}{k}$$

ed essendo l'ultimo termine non sommabile abbiamo dimostrato che $\sum_k f_k$ non converge totalmente.

Se però ci restringiamo all'insieme I_ε abbiamo che per $x \in I_\varepsilon$ vale

$$|f_k(x)| \le e^{-kx^2} \le e^{-k\varepsilon^2} = \left(e^{-\varepsilon^2}\right)^k$$

ed essendo $e^{-\varepsilon^2} < 1$ la serie converge totalmente.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \sqrt{|\sin x|} + \cos(x + y).$$

Dimostrare che f ammette massimo e minimo su tutto $\mathbb{R}^2$; determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che la funzione è 2π periodica sia nella variabile x che nella variabile y: $f(x, y) = f(x + 2\pi, y) = f(x, y + 2\pi)$. Senza perdere generalità possiamo quindi studiare la funzione solo sul quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Essendo la funzione continua, su tale quadrato ammette massimo e minimo. Tali valori sono massimo e minimo anche su tutto $\mathbb{R}^2$, essendo la funzione periodica.

Cerchiamo ora i massimi e minimi locali. Innanzitutto notiamo che tranne che se $\sin x \neq 0$ la funzione è differenziabile e in tal caso possiamo calcolarne le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\pm \cos x}{2\sqrt{|\sin x|}} - \sin(x + y) \\ f_y &= -\sin(x + y) \end{aligned}$$

(dove $\pm$ è il segno di $\sin x$). Perché si annullino entrambe le derivate parziali deve essere $\sin(x + y) = 0$ (quindi $x + y = k\pi$) e deve essere $\cos(x) = 0$ e quindi $x = \pi/2 + k\pi$. Se ci restringiamo al quadrato $[0, 2\pi]^2$ otteniamo quattro punti critici: $P_1 = (\pi/2, \pi/2)$, $P_2 = (\pi/2, 3\pi/2)$, $P_3 = (3\pi/2, \pi/2)$ e $P_4 = (3\pi/2, 3\pi/2)$.

Possiamo anche calcolare le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{-|\sin x|\sqrt{|\sin x|} - \cos x \frac{\cos x}{\sqrt{|\sin x|}}}{2|\sin x|} - \cos(x + y) \\ f_{xy} = f_{yx} &= -\cos(x + y) \\ f_{yy} &= -\cos(x + y) \end{aligned}$$

nei punti singolari, essendo $\cos x = 0$ e $|\sin x| = 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -\frac{1}{2} \mp 1 \\ f_{yy} &= \mp 1 \end{aligned}$$

(dove $\mp$ è il segno opposto a quello di $\cos(x + y)$). Nei punti critici la matrice Jacobiana risulta essere

$$D^2 f(P_1) = D^2 f(P_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^2 f(P_1) = D^2 f(P_4) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi P_1 e P_4 sono punti di sella mentre P_2 e P_3 sono punti di massimo relativo. Nei punti P_1, P_2, P_3 e P_4 la funzione f vale rispettivamente 0, 2, 0, 2.

In questa discussione non abbiamo tenuto conto dei punti in cui la funzione non è differenziabile ovvero i punti $x = k\pi$. Restringiamo il nostro studio al quadrato $[0, 2\pi[^2$. Per $x = 0$ la funzione $f(0, y) = \cos(y)$ ha un massimo per $y = 0$ e un minimo per $y = \pi$. Notiamo però che ristretta alla retta $y = 0$ la funzione $f(x, 0) = \sqrt{|\sin(x)|} + \cos(x)$ ha un minimo relativo, dunque il punto $(0, 0)$ non è nè massimo nè minimo relativo. Il punto $(0, \pi)$ invece è un minimo assoluto in quanto $f(0, \pi) = -1$ ed è $f(x, y) \geq -1$ (in quanto $\sqrt{|\sin x|} \geq 0$ e $\cos(x + y) \geq -1$). Discorso analogo può essere fatto per i punti $(\pi, 0)$ e (π, π) che sono il primo un minimo assoluto e il secondo nè massimo nè minimo.

In conclusione in ogni quadrato di periodicità abbiamo due massimi assoluti ($f = 2$) e due minimi assoluti ($f = -1$).

3. Determinare il volume del solido
$$C = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 + 2\sqrt{x^2 + 2y^2} - x^2 - 2y^2\}.$$
Soluzione. Notiamo che il solido C è il sottografico della funzione $f(x, y) = 3 + 2\sqrt{x^2 + 2y^2} - x^2 - 2y^2$ sull'ellisse $E = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$. Si ha dunque
$$\mathit{Volume}(C) = \iint_E f(x, y)\, dx\, dy.$$
La presenza del termine $x^2 + 2y^2$ ci suggerisce di fare il seguente cambio di coordinate:
$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \frac{\rho \sin\theta}{\sqrt{2}}$$
che ha come determinante Jacobiano
$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ -\rho\sin\theta & \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$
Si ha dunque
$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} [3 + 2\rho - \rho^2] \frac{\rho}{\sqrt{2}}\, d\theta\, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2}\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{23}{12}\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

4. Posto
$$\omega = \frac{2x + y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y - x}{x^2 + y^2} dy, \qquad \gamma(t) = (t(25t^2 - 16), 9 - 18t^2), \quad t \in [-1, 1]$$
calcolare $\int_\gamma \omega$.

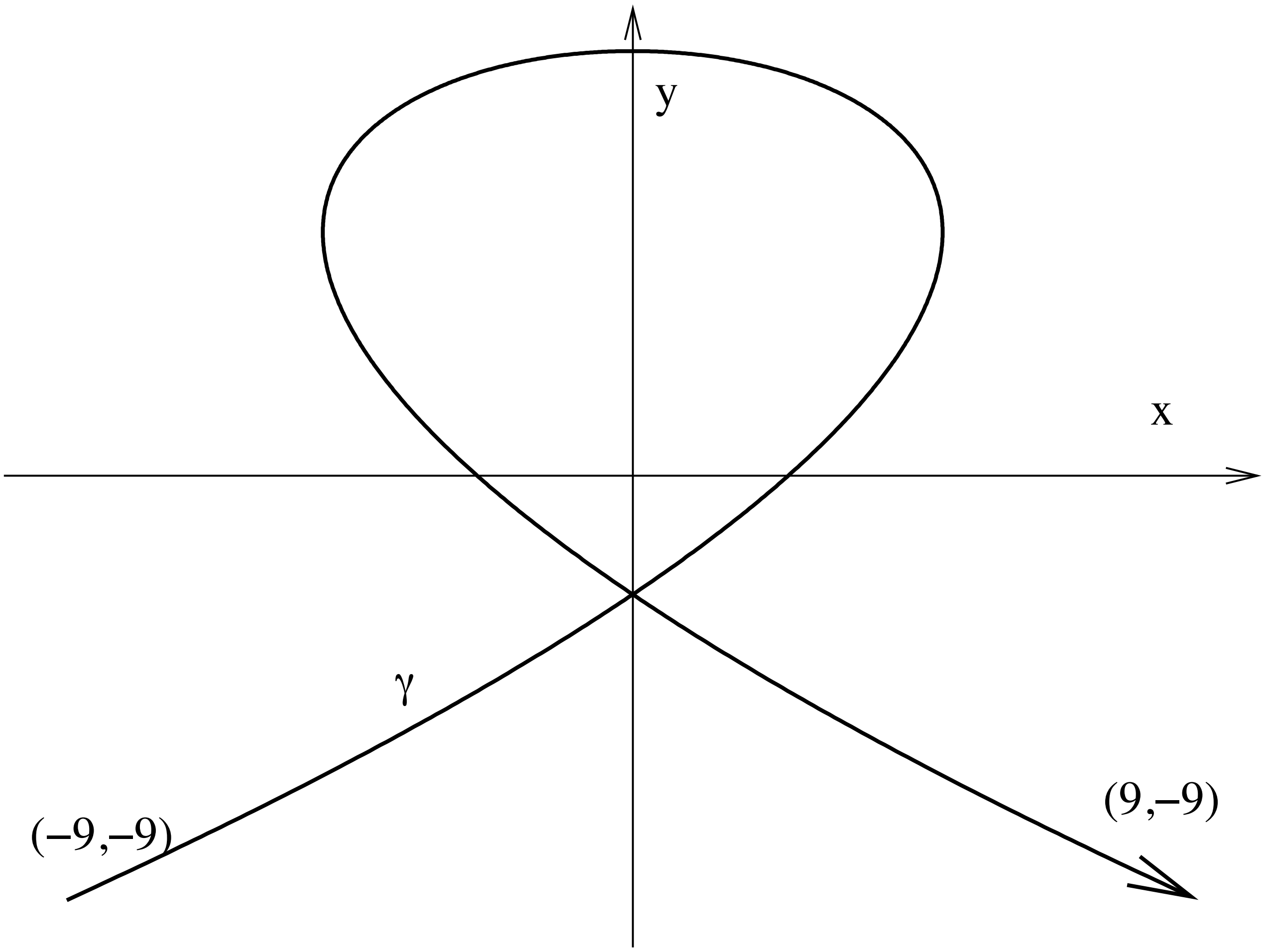
Soluzione. Innanzitutto si può verificare facilmente che ω è una forma chiusa, posto $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ si ha infatti
$$f_y(x, y) = g_x(x, y) = \frac{x^2 - y^2 - 4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$
Notiamo poi che ω non è esatta in quanto l'integrale sul cammino $\varphi_r(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ è
$$\begin{aligned} \int_{\varphi_r} \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{(2r\cos\theta + r\sin\theta)(-r\sin\theta) + (2r\sin\theta - r\cos\theta)(r\cos\theta)}{r^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -1\, d\theta = -2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

La curva γ è una curva con estremi $\gamma(-1) = (-9, -9)$, $\gamma(1) = (9, -9)$. Un rapido studio ci porta poi a concludere che γ fa un giro completo in senso antiorario attorno all'origine $(0, 0)$ che è l'unico punto singolare per la forma ω.

Possiamo quindi asserire che $\int_\gamma \omega = \int_\varphi \omega$ se φ è una curva che congiunge i due punti $(-9, -9)$, $(9, -9)$ e che si avvolge una volta in senso antiorario attorno al punto $(0, 0)$. Prendendo la curva $\varphi = \varphi_r$ con $r = \sqrt{2}$ e $t \in [-3\pi/4, 7\pi/4]$ abbiamo le proprietà richieste e otteniamo:

$$\int_\gamma \omega = \int_\varphi \omega = \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} -1 \, d\theta = -\frac{5}{2}\pi.$$

Revisioni
11 aprile 2003: corretta la visualizzazione di $\mathbb{R}$ nella conversione in HTML


y
x
γ
(−9,−9)
(9,−9)