Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

12 gennaio 2004

1. Determinare tutti i numeri reali x per cui risulta convergente la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin x}{(2+\sin x)^n} .$$
Stabilire inoltre se la serie converge totalmente nell'insieme di convergenza puntuale.

Soluzione. Posto
$$g_n(t) = \frac{t}{(1+t)^n}$$
la serie da studiare è la serie $\sum f_n(x)$ dove $f_n(x) = g_n(1+\sin x)$. Dunque essendo $1+\sin x \in [0,2]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ dobbiamo studiare la serie $\sum g_n(t)$ per $t \in [0,2]$. La serie $\sum g_n(t)$ è una serie geometrica e converge quindi puntualmente quando $|1+t| > 1$ ovvero per ogni $t \in (0,2]$. Ma per $t = 0$ la serie risulta avere tutti i termini nulli e quindi si ha convergenza puntuale per ogni $t \in [0,2]$. Dunque la serie data $\sum f_n(x)$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza totale della serie $\sum g_n(t)$. Si ha
$$\sup_{t\in[0,2]} |g_n(t)| \geq g_n(1/n) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n .$$
Posto $a_n = g_n(1/n)$ si ha dunque $\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$. Questo significa che la serie numerica $\sum a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum 1/n$ e dunque diverge. Di conseguenza la serie di funzioni $\sum g_n(t)$ non converge totalmente sull'intervallo $[0,2]$.

In conclusione visto che
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{t\in[0,2]} |g_n(t)|$$
la serie $\sum f_n(x)$ non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione alternativa. Si nota che la serie in questione è una serie geometrica di cui è quindi possibile calcolare esplicitamente la somma. Infatti posto $\alpha = 1/(2+\sin x)$, quando $1+\sin x \neq 0$ si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin x}{(2+\sin x)^n} = (1+\sin x)\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = (1+\sin x)\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\frac{1+\sin x}{2+\sin x}}{1-\frac{1}{2+\sin x}} = 1$$
mentre se $1+\sin x = 0$ la somma in questione vale 0.

Dunque la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ alla funzione

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sin x = -1 \\ 0 & \text{se } \sin x = -1 \end{cases}$$

che non è una funzione continua. Visto che i termini della serie sono funzioni continue la convergenza non può essere uniforme e quindi neanche totale.

2. Calcolare i punti critici e stabilire se si tratta di punti di massimo o di minimo relativo per la funzione

$$f(x, y) = 9x^4 + 12x^3y + 2y^6.$$

Soluzione. Si ha

$$f_x(x, y) = 36x^3 + 36x^2y \quad f_y(x, y) = 12x^3 + 12y^2$$

dunque i punti critici di f si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2(x + y) = 0 \\ x^3 + y^5 = 0 \end{cases}$$

che si trova facilmente possedere le tre soluzioni: $(0, 0)$, $(\pm 1, \mp 1)$.

Le derivate seconde sono

$$f_{xx}(x, y) = 108x^2 + 72xy, \quad f_{yy}(x, y) = 60y^4, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 36x^2.$$

Nei punti critici $(\pm 1, \mp 1)$ si trova dunque

$$\det(D^2 f(\pm 1, \mp 1)) = \det \begin{pmatrix} 108 - 72 & 36 \\ 36 & 60 \end{pmatrix} = 36 \cdot 60 - 36^2 > 0$$

ed essendo positiva la traccia della matrice, se ne deduce che $(\pm 1, \mp 1)$ sono due punti di minimo relativo.

Nel punto $(0, 0)$ il determinante Jacobiano è nullo e quindi questo metodo non ci permette di capire la natura di questo punto critico. Notiamo però che restringendo la funzione alla retta $y = 0$ si ottiene $f(x, 0) = 2y^6$ che chiaramente presenta un punto di minimo per $y = 0$. Se invece restringiamo la funzione alla retta $y = -x$ si ottiene $f(x, -x) = 2x^6 - 3x^4$ che è una funzione con un punto di massimo (relativo) per $x = 0$. Dunque il punto $(0, 0)$ non è né un massimo né un minimo (relativo) per f.

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Soluzione. Il polinomio associato all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ che ha due radici distinte $\lambda_{12} = 1, 2$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogena può essere cercata della forma

$$\bar{y}(x) = axe^x$$

da cui imponendo

$$\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = e^x$$

si ricava $a = -1$.

Dunque tutte le soluzioni dell'equazione data sono del tipo

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Aggiornamenti:

17.1.2004 Ho aggiunto la soluzione alternativa al primo esercizio.