Analisi Matematica III e IV modulo
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

12 luglio 2004

1. Si consideri la successione di funzioni
$$f_k(x) = ke^{-k^2x^2}\sin x.$$
   (a) Mostrare che c'è convergenza puntuale ma non uniforme su tutta la retta reale;

   (b) mostrare che c'è convergenza uniforme sugli intervalli del tipo $[\varepsilon, +\infty)$ per qualunque $\varepsilon > 0$.

   Soluzione. Essendo
$$\lim_{k\to\infty} ke^{-k^2} = 0$$
   concludiamo che la successione ha limite puntuale $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo poi
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| \geq |f_k(1/k)| = \frac{\sin(1/k)}{1/k} e^{-1} \to 1/e$$
   la convergenza non può essere uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

   Notiamo ora che per ogni x si ha $|\sin x| \leq |x|$ e quindi $|f_k(x)| \leq |g_k(x)|$ dove
$$g_k(x) = kxe^{-k^2x^2}.$$
   Notiamo ora che la funzione $g_k(x)$ tende a zero all'infinito, e ha un massimo assoluto nel punto $x = 1/(\sqrt{2}k)$. Dunque se $k > 1/\varepsilon$ la funzione è decrescente su tutto l'intervallo $[\varepsilon, +\infty)$ e quindi
$$\sup_{x\in[\varepsilon,+\infty)} |f_k(x)| \leq \sup_{x\in[\varepsilon,+\infty)} |g_k(x)| = g_k(\varepsilon) \to 0.$$
   Questo ci permette di concludere che c'è convergenza puntuale, della successione f_k, sull'intervallo $[\varepsilon, +\infty)$.

2. Trovare i punti critici della funzione
$$f(x, y) = x^2 y \sin x$$
   indicando se sono massimi o minimi locali.

   Soluzione. Si ha
$$f_x = 2xy \sin x + x^2 y \cos x, \qquad f_y = x^2 \sin x,$$

da cui si trova facilmente che i punti critici di f sono i punti del tipo $(k\pi, 0)$ con k intero, e i punti del tipo $(0, y)$ con y reale qualunque. Calcolando le derivate seconde si nota che

$$f_{yy} = 0, \qquad f_{yx} = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

e dunque il determinante Hessiano è dato da $Hf(x, y) = -f_{xy}^2$. Nei punti $(k\pi, 0)$ con $k \neq 0$ tale determinante risulta dunque essere negativo e di conseguenza questi punti sono punti di sella. Nei punti $(0, y)$, abbiamo invece determinante Hessiano nullo.

D'altra parte è facile studiare il segno di f. Sull'asse delle y la funzione si annulla. Nella striscia $\{x \in (0, \pi), y > 0\}$ è positiva mentre in $\{(x \in (-\pi, 0), y > 0\}$ è negativa. Dunque i punti $(0, y)$ con $y \geq 0$ non sono né massimi né minimi relativi. Con ragionamento analogo si giunge alla stessa conclusione per i punti $(0, y)$ con y negativo.

3. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (e^y + y \cos x)\, dx + (x(1 + e^y) + \sin x)\, dy$$

sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, \pi].$$

Soluzione. Notiamo che la forma differenziale da integrare si decompone come somma di due forme differenziali

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad \omega_1 = (e^y + y \cos x)\, dx + (e^y + \sin x)\, dy, \qquad \omega_2 = x dy.$$

Da una rapida verifica si nota che ω_1 è esatta e quindi l'integrale di ω_1 può essere calcolato lungo il segmento con gli stessi estremi della curva γ.

Si ha dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 = \int_1^{-1} (e^0 + 0)(-1)\, dt + \int_0^\pi \cos t \cos t\, dt = -2 + \frac{\pi}{2}.$$

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{1}{x \log y}\, dx dy$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x \in [1, 2], \quad x \leq y \leq 2\}.$$

Soluzione. Per calcolare l'integrale è necessario integrare prima rispetto alla variabile x e poi rispetto a y. Dobbiamo dunque riscrivere il dominio D come normale rispetto a y

$$D = \{(x, y) \colon y \in [1, 2], \quad 1 \leq x \leq y\}$$

e quindi utilizzando la formula di riduzione, l'integrale cercato può essere calcolato come

$$\int_1^2 \left[\int_1^y \frac{1}{x \log y}\, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{\log x}{\log y} \right]_{x=1}^y dy = \int_1^2 \frac{\log y}{\log y}\, dy = 1.$$