Analisi Matematica III e IV modulo
Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

17 gennaio 2005

1. Studiare la convergenza puntuale e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{(1+x^2)^n}.$$

Soluzione. Sia

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{(1+x^2)^n}.$$

Essendo $f_n(0) = 0$ per ogni n, la serie converge nel punto $x = 0$. Se $x \neq 0$ si ha

$$\left| \frac{\sin^2(nx)}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{1}{(1+|x|^2)^n}$$

e dunque confrontando la serie data con la serie geometrica $\sum q^n$ di ragione $q = \frac{1}{1+|x|^2}$ scopriamo che essendo $q < 1$ per ogni $x \neq 0$, la serie data converge. Dunque la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Inoltre la serie converge totalmente sugli insiemi del tipo $I_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty) \cup (-\infty, -\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$. Infatti si ha

$$\sum_n \sup_{x \in I_\varepsilon} |f_n(x)| \leq \sum_n \sup_{x \in I_\varepsilon} \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \sum_n \sup_{x \in I_\varepsilon} \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n} < +\infty.$$

Non si ha invece convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$, infatti notiamo che vale

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f_n(1/n)| = \frac{\sin^2 1}{\left(1 + \frac{1}{n}^2\right)^n} \to \sin^2 1 \qquad \text{per } n \to \infty$$

da cui

$$\sum_n \sup_x |f_n(x)| \geq \sum_n \sin^2 1 = +\infty.$$

2. Dire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-3y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua e differenziabile nel punto $(0,0)$.

Soluzione. La funzione è continua in $(0,0)$ in quanto

$$\begin{aligned} \left|\frac{2x^3-3y^3}{x^2+y^2}\right| &\leq \frac{2|x|^3+3|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+3(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})}{x^2+y^2} \\ &= 5\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la differenziabilità consideriamo la derivata direzionale nella direzione $v = (\alpha, \beta)$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(0,0)}{\partial v} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h\alpha, h\beta) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2h^3\alpha^3 - 3h^3\beta^3}{h^2\alpha^2 + h^2\beta^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3(2\alpha^3+3\beta^3)}{h^3(\alpha^2+\beta^2)} = \frac{2\alpha^3+3\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

In particolare ottengo $f_x(0,0) = 2$ ($\alpha = 1$, $\beta = 0$), $f_y(0,0) = 3$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$). Se f fosse differenziabile si dovrebbe allora avere

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \alpha f_x + \beta f_y$$

che nel punto $(0,0)$ significherebbe

$$\frac{2\alpha^3+3\beta^3}{\alpha^2+\beta^2} = 2\alpha + 3\beta$$

che invece è falso. Dunque f non è differenziabile nel punto $(0,0)$.

3. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x^3+4y^3}{3xy^2}.$$

Soluzione. Si tratta di una equazione omogenea. Posto $z = y/x$ si ha $y = zx$, $y' = z'x + z$. L'equazione diventa quindi

$$z'x + z = \frac{x^3+4z^3x^3}{3xz^2x^2} = \frac{1+4z^3}{3z^2}$$

da cui

$$z'x = \frac{1+4z^3-3z^3}{3z^2} = \frac{1+z^3}{3z^2}$$

ovvero
$$\frac{3z^2}{1+z^3}z' = \frac{1}{x}.$$
Questa equazione può essere scritta come
$$(\log|1+z^3|)' = (\log|x|)'$$
cioè
$$\log|1+z^3| = \log|x| + c.$$
Prendendo l'esponenziale, si ha
$$1+z^3 = \pm e^c x = kx$$
da cui
$$z = \sqrt[3]{kx-1}$$
e in conclusione
$$y = zx = x\sqrt[3]{kx-1}.$$

4. Dopo averne determinato eventuali simmetrie, calcolare l'area della regione di piano
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| \geq |x| \operatorname{tg}(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Soluzione. La regione è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi coordinati in quanto le disequazioni non cambiano nè sostituendo $-x$ a x nè sostituendo $-y$ a y. Sarà dunque sufficiente calcolare l'area dell'intersezione del dominio con il primo quadrante:
$$D_1 = D \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}.$$
Dunque possiamo supporre che sia $x \geq 0$ e $y \geq 0$. La disequazione che definisce il dominio risulta quindi essere