

Analisi Matematica I modulo

Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

17 gennaio 2007

1. Sia a_n una successione che soddisfa la proprietà

$$a_{n+1} = 1 + \operatorname{arctg}(a_n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare (se esiste) il limite della successione a_n .

Soluzione. Si tratta di una successione definita per ricorrenza nella forma $a_{n+1} = f(a_n)$ dove si è posto $f(x) = 1 + \operatorname{arctg}(x - 1)$. Osserviamo che la funzione f ha le seguenti proprietà (che possono essere dimostrate studiando la derivata di f):

- (a) $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$, $x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1$
(b) $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq x$, $x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq x$.

Dalla prima proprietà si deduce che se $a_n \geq 1$ allora anche $a_{n+1} \geq 1$. Dalla seconda si deduce che se $a_n \geq 1$ allora $a_{n+1} \leq a_n$. Ragionando per induzione, se $a_1 \geq 1$ allora $a_n \geq 1$ per ogni n e $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n . Dunque in questo caso la successione è decrescente e limitata e di conseguenza è convergente. Viceversa se $a_1 \leq 1$ si ottiene che la successione è crescente e limitata e quindi anche in questo caso converge.

Sapendo che $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ (la successione è convergente), possiamo facilmente trovare i possibili valori di a passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$. Visto che f è continua si ottiene infatti $a = f(a)$ che ha come unica soluzione $a = 1$ (sempre in base alla proprietà (a) enunciata in precedenza).

2. Calcolare o dimostrare che non esiste il seguente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - \sin \frac{1+x}{x}.$$

Soluzione. Il limite non esiste, infatti scegliendo le successioni

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad y_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

si ottiene

$$x_n \rightarrow +\infty, \quad y_n \rightarrow +\infty.$$

D'altra parte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sin \frac{1+x_n}{x_n} = 1 - \sin 1$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 - \sin \frac{1+y_n}{y_n} = -1 - \sin 1.$$

Se il limite in questione esistesse, per il teorema di collegamento, i due limiti ottenuti lungo le successioni x_n e y_n dovrebbero essere uguali.

3. Si consideri la disequazione

$$\log(1+x^2) \geq (\operatorname{arctg} x) - x.$$

Mostrare che

- (a) la disequazione è valida per ogni $x \geq 0$;
- (b) la disequazione è valida in un intorno sinistro di 0;
- (c) la disequazione non è valida per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Posto $f(x) = \log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + x$, la disequazione da studiare si può scrivere come $f(x) \geq 0$. Osserviamo che si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + 1 = \frac{x^2+2x}{1+x^2}$$

e in particolare $f'(x) \geq 0$ se $x \geq 0$. Dunque la funzione f è crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$ ed essendo $f(0) = 0$ concludiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

Osserviamo anche che $f'(x) \leq 0$ se $x \in [-2, 0]$ e dunque la funzione è decrescente sull'intervallo $[-2, 0]$. Analogamente a prima, essendo $f(0) = 0$ otteniamo che $f(x) \geq f(0) = 0$ per $x \in [-2, 0]$. Dunque la disequazione è verificata in un intorno sinistro di 0.

Per l'ultima questione basta notare che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

e in base al teorema della permanenza del segno possiamo affermare che esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \leq -M$ si ha $f(x) < 0$.