Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

18 Gennaio 2012- **COMPITO** 1- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(2-3e^{-n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$, (b) $\lim_{x\to 1^+} \log(x)^{\frac{x^2+x-2}{x^2-x}}$.

(a) 4 (b) 0

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}\, dx$.

$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2dt$

$= \int \frac{t-3}{t^2-3t+2} 2t\, dt = 2\int \frac{t^2-3t+2-2}{t^2-3t+2} = \int 2\, dt - 4\int \frac{1}{t^2-3t+2} = \dots$

Metodo razionalizz. $\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1}$ $= 2t - 4\log|t-2| + 4\log|t-1| + C$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{x\log(x)+2x}{2-\log(x)}$.

$(0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (eliminabile)

$\lim_{x\to (e^2)^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to (e^2)^-} f(x) = +\infty$ asint. verticale

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

no asint. obbliqui.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \arctan(\frac{1}{x-2}) - \log(x^2-4x+5)$.

$x^2-4x+5 > 0\ \forall x$ definita in $\mathbb{R} - \{2\}$.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{3-2x}{x^2-4x+5}$ $x = \frac{3}{2}$ max relativo

non ha min e max assoluti.

COMPITO 1

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, y - y^2 \arctan(\cos(x))$ nell'intervallo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Bernoulli $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} \Rightarrow z' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} z + \operatorname{arctg}(\cos x)$

$z(x) = e^{-\log(\operatorname{sen} x)} \int e^{\log(\operatorname{sen} x)} \operatorname{arctg}(\cos x)\, dx = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \left[\int \operatorname{sen} x \operatorname{arctg}(\cos x)\, dx + c \right]$

$\int \operatorname{sen} x \operatorname{arctg}(\cos x)\, dx = \int t \operatorname{arctg} t =$ per parti $=$ etc.

6. (4 punti) In una certa localitá sciistica, durante l'inverno, la probabilitá che la temperatura sia compresa tra -5 e 0 gradi del 70% e in tal caso la probabilitá che nevichi il 5%. La probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi del 10% e in tal caso la probabilitá che nevichi il 2%. La temperatura é superiore a 0 gradi con probabilitá 20% e in tal caso non nevica. Se nevica, qual é la probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi?

$P(T_1) = 0{,}70$ $P(N/T_1) = 0{,}05$ dobbiamo calcolare $P(T_2 \backslash N)$

$P(T_2) = 0{,}10$ $P(N/T_2) = 0{,}02$

$P(T_3) = 0{,}20$ $P(N/T_3) = 0{,}00$

$P(T_2/N) = \frac{P(N/T_2)\,P(T_2)}{P(N)} = \frac{P(N/T_2)\,P(T_2)}{P(N/T_1)\,P(T_1) + P(N/T_2)\,P(T_2) + P(N/T_3)\,P(T_3)} = 0{,}054 = 5{,}4\%$

7. (4 punti) .In un negozio si vendono sciarpe, guanti e berretti rispettivamente a 10, 8 e 7 euro. Un articolo venduto nel 40% dei casi una sciarpa, nel 10% un paio di guanti e nel 50% un berretto. Calcolare media e varianza dell'incasso per un articolo venduto. Sapendo che in una giornata vengono venduti 150 articoli, calcolare la probabilitá che l'incasso sia inferiore a 1220 euro.

Per ogni articolo venduto : $\mu = 10 \cdot 0{,}40 + 8 \cdot 0{,}10 + 7 \cdot 0{,}50 = 8.30$

$\sigma^2 = (10-\mu)^2 0{,}40 + (8-\mu)^2 0{,}10 + (7-\mu^2) 0{,}50 = 2.01$

$P(X < 1220) = P\left(Z < \frac{1220 - 1245}{24.62}\right) = \Phi(-1{,}44) + \frac{1}{2} = 0{,}5 - 0{,}4251 = 0{,}075 = 7{,}5\%$

8. (8 punti) **Limiti di successioni e Teorema dell'unicitá del limite.**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

18 Gennaio 2012- **COMPITO 2**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (*a*) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+11}-\sqrt{2n+4}}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}}$, (*b*) $\lim_{x\to-\infty}(x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + \arctan x)$.

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{x^4-2x^3+x^2-2}{x^3-2x^2+x}\, dx$.

$= \int \frac{x(x^3-2x^2+x)}{x^3-2x^2+x} - 2\int \frac{1}{x(x-1)^2} =$ fazion $= \left[\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\right]$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x-1} - 2\log(x-1) - 2\log x + c$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x^2+1}{x}}+1}$.

$x \neq 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ 0 punto sing. 2 specie

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1$ asint. orizz. all'∞

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \frac{2-\log(x)}{x(\log(x)+2)}$.

$x > 0$ e $\boxed{x \neq e^{-2}}$

$\lim_{x\to(e^{-2})^-} f(x) = -\infty$ $f'(x) = \frac{\log^2 x - 8}{[x(\log x+2)]^2}$ $f(e^2) = 0$

$\lim_{x\to(e^{-2})^+} f(x) = +\infty$ $f'(x) = 0 \iff x = e^{-2\sqrt{2}}$ $x = e^{2\sqrt{2}}$

$x = e^{-2\sqrt{2}}$ max rel. non ha max

$x = e^{2\sqrt{2}}$ min rel. o min. ass.

COMPITO 2

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y + \frac{e^{2x}(x-1)}{2(x^3+x)} \frac{1}{y}$ per $x \in [1,2]$.

Bernoulli $y^2 = z \Rightarrow 2yy' = z' \Rightarrow yy' = \frac{z'}{2}$

$z' = 2z + \frac{e^{2x}(x-1)}{(x^3+x)} \Rightarrow z(t) = e^{2x} \cdot \left[\int \cancel{e^{-2x}} \cdot \cancel{e^{2x}} \frac{(x-1)}{x(x+1)} dx + c \right]$

$\int \frac{x-1}{x(x+1)} = \int \frac{x}{x+1} - \int \frac{1}{x(x+1)} =$ Ramm.

6. (4 punti) In una certa localitá sciistica, durante l'inverno, la probabilitá che la temperatura sia compresa tra -5 e 0 gradi del 60% e in tal caso la probabilitá che nevichi il 5%. La probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi del 15% e in tal caso la probabilitá che nevichi è il 2%. La temperatura è superiore a 0 gradi con probabilitá 25% e in tal caso non nevica. Se nevica, qual è la probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi?

Procedimento su compito 1 : $P = 0{,}091 = 9{,}1\%$

7. (4 punti) In un negozio si vendono sciarpe, guanti e berretti rispettivamente a 10, 7 e 8 euro. Un articolo venduto nel 40% dei casi una sciarpa, nel 10% un paio di guanti e nel 50% un berretto. Calcolare media e varianza dell'incasso per un articolo venduto. Sapendo che in una giornata vengono venduti 150 articoli, calcolare la probabilitá che l'incasso sia inferiore a 1290 euro.

Procedimento compito 1

$\mu = 8{,}70$, $\sigma^2 = 1{,}21$, $p = 0{,}13$

8. (8 punti) **Minimi e massimi relativi. Teorema di Fermat e Teorema di Rolle.**

COMPITO 3

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

18 Gennaio 2012- **COMPITO 3**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (*a*) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n^2-\log^{12}(n)}{3^n-n\sqrt{n+5}}$, (*b*) $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\,(2^{\frac{1}{\log(x)}}-1)$.

(a) 0 (b) 0

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{e^{5x}-2}{e^{5x}+1}dx$.

$e^{5x}=t \Rightarrow 5e^{5x}dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{5t}$

$= \frac{1}{5}\int \frac{t-2}{(t+1)t}\,dt = \frac{1}{5}\left[-2\log|t| + 3\log|t+1| + C\right]$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{\log^2(x)+3}{\log^2(x)-1}$.

$\boxed{\log^2 x \neq 1 \Rightarrow x \neq e \quad x \neq e^{-1},\ x>0}$

$\lim_{x\to(e^{-1})^+} f = -\infty$ $\quad \lim_{x\to(e)^+} f(x) = -\infty$ Asint. vert

$\lim_{x\to(e^{-1})^-} f = +\infty$ $\quad \lim_{x\to(e)^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (disc eliminabile)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ Asint. orizz.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \log(x^2+9) + \arctan\left(\frac{3}{x}\right)$.

$x \neq 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log 9 + \pi/2$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \log 9 - \pi/2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2+9}$

$x = \frac{3}{2}$ min. rel.

no max o min. assol.

COMPITO 3

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $\frac{\sqrt{y+1}}{\sin^2(x)}y' = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}$ per $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

variabili separate

$\sqrt{y+1}\, y' = \frac{\cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + 1} \Rightarrow \frac{2}{3}(y+1)^{3/2} = \int \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$ etc.

$t = \operatorname{sen} x$.

6. (4 punti) In una certa localitá sciistica, durante l'inverno, la probabilitá che la temperatura sia compresa tra -5 e 0 gradi è del 60% e in tal caso la probabilitá che nevichi è il 10%. La probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi del 15% e in tal caso la probabilitáche nevichi il 2%. La temperatura é superiore a 0 gradi con probabilitá 25% e in tal caso non nevica. Se nevica, qual é la probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi?

Procedimento compito 1 : $P = 0{,}048 = 4{,}8\%$

7. (4 punti) In un negozio si vendono sciarpe, guanti e berretti rispettivamente a 10, 8 e 7 euro. Un articolo venduto nel 50% dei casi una sciarpa, nel 10% un paio di guanti e nel 40% un berretto. Calcolare media e varianza dell'incasso per un articolo venduto. Sapendo che in una giornata vengono venduti 150 articoli, calcolare la probabilitá che l'incasso sia inferiore a 1280 euro.

Procedimento compito 1.

$\mu = 8{,}60$, $\sigma^2 = 2{,}04$, $p = 0{,}28$

8. (8 punti) **Funzioni monotone. Condizioni necessarie e sufficienti per la crescenza di una funzione.**

COMPITO 4

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

18 Gennaio 2012- **COMPITO 4**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n^2-3\log(n)}{\log(n)-n^2}\right)$ (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{1-x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$.

(a) $-\infty$ (b) e^2

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\sqrt{\cos(x)}}{\sqrt{\cos(x)}-2}\, dx$.

$\sqrt{\cos x} = t \Rightarrow \cos x = t^2 \Rightarrow -\operatorname{sen} x\, dx = 2t\, dt$ $\boxed{x=0 \Rightarrow t=\sqrt{\cos 0}=1,\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0}$

$= -\int \frac{t}{t-2}\cdot 2t\, dt = -2\int \frac{t^2-4+4}{t-2} = -2\int \frac{\cancel{(t-2)}(t+2)}{\cancel{t-2}} - 8\int \frac{1}{t-2} =$

$= -t^2-4t-8\log|t-2|+c.$ (si inverte il segno).

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{x}{x-2} + \log(x-1)$.

$x \neq 2$ e $x-1>0 \Rightarrow x>1$ e $x\neq 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ } asint. verticali

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ no asint obl.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \log\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) - \frac{x}{2}$. Determinare i punti in cui $f(x)=0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$f(0) = \log\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

$f'(x) = \frac{1-e^x}{2(e^x+1)}$

$x=1$ p. di max rel.

non ha max o min ass.

COMPITO 4

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = 2y + \frac{e^x}{x}(\log(\log(x))\sqrt{y}$ per $x \in [1, 4]$.

$z = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z$

$z' = z + \frac{e^x}{2} \log(\log x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow z(x) = e^x \left[\int \cancel{e^{-x}} \cancel{e^x} \log(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx + C \right]$

$\int \log(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \int \log t \, dt = t \log t - t \rightsquigarrow = e^x [\log(\log x) \log x - \log x + C]$

6. (4 punti) In una certa localitá sciistica, durante l'inverno, la probabilitá che la temperatura sia compresa tra -5 e 0 gradi é del 70% e in tal caso la probabilitá che nevichi il 7%. La probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi è del 10% e in tal caso la probabilitá che nevichi è il 3%. La temperatura superiore a 0 gradi con probabilitá 20% e in tal caso non nevica. Se nevica, qual è la probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi?

Procedimento compito 1 $P = 0,058 = 5,8\%$

7. (4 punti) In un negozio si vendono sciarpe, guanti e berretti rispettivamente a 10, 8 e 5 euro. Un articolo venduto nel 50% dei casi una sciarpa, nel 10% un paio di guanti e nel 40% un berretto. Calcolare media e varianza dell'incasso per un articolo venduto. Sapendo che in una giornata vengono venduti 150 articoli, calcolare la probabilitá che l'incasso sia inferiore a 1150 euro.

Procedimento compito 1

$\mu = 7,80, \quad \sigma^2 = 5,56, \quad P = 0,24$

8. (8 punti) **Primitive e Teorema fondamentale del Calcolo Integrale e Formula fondamentale del Calcolo Integrale.**

COMPITO 5

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

18 Gennaio 2012- **COMPITO 5**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)+x\log(1+x)}$.

   (a) -1 (b) $-\frac{1}{4}$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{\log 2} \frac{\sqrt{e^x-1}+1}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

   $\sqrt{e^x-1} = t \Rightarrow e^x = t^2+1 \Rightarrow e^x dx = 2t\,dt \quad x=0 \Rightarrow t=0 \quad x=\log 2 \Rightarrow t=1$

   $= \int_0^1 \frac{t+1}{\cancel{t}} \cdot \frac{2\cancel{t}}{t^2+1} dt = \int \frac{2t}{t^2+1} + \int \frac{2}{t^2+1} = \left[\log(t^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}\, t\right]_0^1 = \dots$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{3e^x+1}{e^x-e} - 3x$.

   $x \neq 1$

   $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$ asint. vert.

   $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

   $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -3$

   $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - 3x) = 3$

   $y = -3x+3$ asint. obb. $x \to +\infty$

   $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

   asint. obbl. $y = -3x - 1$

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \frac{\log^2(x)+3}{\log^2(x)-1}$.

   $x > 0 \quad x \neq e^{-1} \text{ e } x \neq e$

   $\lim_{x\to (e^{-1})^{\pm}} f(x) = \mp\infty$

   $\lim_{x\to (e)^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

   $\lim_{x\to +\infty} f = 1 \quad \lim_{x\to 0} f = 1$

   $f'(x) = \frac{-8}{x} \log x$

   $f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1$ Max rel.

   $f'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$

   non ha max o min. ass.

COMPITO 5

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = 6y + 2e^{3x}\frac{x-1}{(x+1)^2}\sqrt{y}$.

$\left(z = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}\right) \quad z' = 3z + e^{3x}\frac{x-1}{(x+1)^2}$

$z(x) = e^{3x}\left[\int e^{-3x}e^{3x}\frac{x-1}{(x+1)^2}dx\right] = \dots$

$\int \frac{x-1}{(x+1)^2} = \int \frac{x+1-1-1}{(x+1)^2} = \int \frac{x+1}{(x+1)^2} - 2\int \frac{1}{(x+1)^2} = \log|x+1| + \frac{2}{x+1} + c.$

6. (4 punti) In una certa localitá sciistica, durante l'inverno, la probabilitá che la temperatura sia compresa tra -5 e 0 gradi è dell'80% e in tal caso la probabilitá che nevichi è il 7%. La probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi è del 10% e in tal caso la probabilitá che nevichi il 3%. La temperatura è superiore a 0 gradi con probabilitá 10% e in tal caso non nevica. Se nevica, qual la probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi?

Procedimento compito 1 $P = 0,051 = 5,1\%$

7. (4 punti) In un negozio si vendono sciarpe, guanti e berretti rispettivamente a 10, 8 e 5 euro. Un articolo venduto nel 40% dei casi una sciarpa, nel 10% un paio di guanti e nel 50% un berretto. Calcolare media e varianza dell'incasso per un articolo venduto. Sapendo che in una giornata vengono venduti 150 articoli, calcolare la probabilitá che l'incasso sia inferiore a 1080 euro.

Procedimento compito 1

$\mu = 6,40 \quad , \sigma^2 = 2,04 \quad , p = 0,20$

8. (8 punti) **Equazione di Malthus. Studio dell'evoluzione di una popolazione isolata.**

COMPITO 6

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

18 Gennaio 2012- **COMPITO 6**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\left(\frac{n^2-5\log(n)}{4-8e^n}\right)$, (b) $\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^3(x)}{x^2(\cos(x)-1)}$.

(a) 0 (b) $-\infty$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{2}}\left((2x)^{\frac{1}{3}}+1\right)}\, dx$.

$(2x)^{\frac{1}{6}} = t \Rightarrow 2x = t^6 \Rightarrow 2dx = 6t^5 dt \Rightarrow dx = 3t^5 dx$

$= \int \frac{3t^5}{t^3(t^2+1)} dt = 3\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 3(t - \operatorname{arctg} t) + C.$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{2-\log(x)}{x\,(\log(x)+2)}$.

$x>0 \quad \log x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq e^{-2}$

$\lim_{x\to(e^{-2})^-} f = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to(e^{-2})^+} f = +\infty. \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ Asintotic.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \frac{x}{\log^2(x)+3x}$.

$x>0$ e $\log^2 x + 3x \neq 0$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

$f(1) = \frac{1}{3}$ MAX assoluto

$f'(x) = \frac{\log x(\log x - 2)}{[\log^2 x + 3x]^2}$

$+ \quad 1 \quad - \quad e^2 \quad +$

MAX REL. MIN. REL.

COMP 1106

5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 8y = 0$ tale che $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$. Determinare il valore della soluzione in $t = 0$.

$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda-4)(\lambda+2) \Rightarrow y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$

$\begin{cases} c_1 e^4 + c_2 e^{-2} = 1 \\ 4c_1 e^4 - 2c_2 e^{-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 2c_1 e^6 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} e^{-4}$

$\boxed{y(t) = \frac{1}{3} e^{4t-4} + \frac{2}{3} e^{2-2t}}$ $\quad y(0) = \frac{1}{3}(e^{-4} + 2e^{2})$

6. (4 punti) In una certa localitá sciistica, durante l'inverno, la probabilitá che la temperatura sia compresa tra -5 e 0 gradi è del 70% e in tal caso la probabilitá che nevichi è il 7%. La probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi è del 15% e in tal caso la probabilitá che nevichi il 3%. La temperatura superiore a 0 gradi con probabilitá 15% e in tal caso non nevica. Se nevica, qual è la probabilitá che la temperatura sia inferiore a -5 gradi?

Procedimento compito 1 $\quad P = 0{,}084 = 8{,}4\%$

7. (4 punti) In un negozio si vendono sciarpe, guanti e berretti rispettivamente a 8, 7 e 5 euro. Un articolo venduto nel 40% dei casi una sciarpa, nel 10% un paio di guanti e nel 50% un berretto. Calcolare media e varianza dell'incasso per un articolo venduto. Sapendo che in una giornata vengono venduti 150 articoli, calcolare la probabilitá che l'incasso sia inferiore a 945 euro.

Procedimento compito 1,

$\mu = 7{,}30 \quad \sigma^2 = 5{,}61 \quad , \quad p = 0{,}30$

8. (8 punti) **Equazioni di Bernoulli e studio dell'equazione logistica.**