

Nome

Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin(\frac{4}{n^2}) \log(1 + \frac{5}{e^{n^2}})$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x+1)}{\cos^2(x)-1}$

(a) 0

(b) $-\infty$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \log(x) dx$.

$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ $x=1 \Rightarrow t=1$ $x=4 \Rightarrow t=2$

$\int_1^4 \frac{t+2}{t} \log(t^2) \cdot 2t dt = 4 \int_1^2 (t+2) \log t dt$ - per parti
 $= 4 \left[\frac{(t+2)^2}{2} \log t - 4 \int \frac{(t+2)^2}{2t} dt \right] = 4 \left[\frac{(t+2)^2}{2} \log t - \left[\frac{t^2}{4} + 2t - 2 \log t + c \right] \right]$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{2e^x}{e^x-1} + 5x$.

$e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 5x = 2 \Rightarrow y = 5x + 2$
Asint. obbl.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 5x = 0$

$\Rightarrow y = 5x$

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$f(x) = \frac{\sqrt{e^x+4}}{e^x-9}$

$e^x \neq 9 \Rightarrow x \neq \log 9$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{2}{9}$

$\lim_{x \rightarrow (\log 9)^\pm} f(x) = \pm\infty$

$f'(x) = \frac{e^x(e^x-9-2e^x-8)}{(e^x-9)^2 \sqrt{e^x+4}} \Rightarrow$

$-(e^x+17) < 0$ decrescente

no max
no min rel e ass

impeto ↓

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = -\frac{2}{x+3}y + (x+3)\sin(x)\sqrt{y}$, definita nell'intervallo $[1, 2]$.

Bernoulli $z = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow 2z' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$

$$2z' = -\frac{2}{x+3}z + (x+3)\sin x \Rightarrow z(x) = \frac{1}{x+3} \left[\int (x+3)^2 \sin x \, dx + C \right]$$

= per parti = etc.

6. (4 punti) In una coltura cellulare sono state marcate 87 cellule. Esaminando al microscopio lo 0.7% delle cellule dell'intera coltura, qual è la probabilità di trovarne esattamente 3 marcate?

La probabilità che la cellula venga esaminata è $p = 0,007$.

La probab che su $n = 87$ cellule marcate ne vengono esaminate $k = 3$ è data dalla distribuzione binomiale

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 2,01\%$$

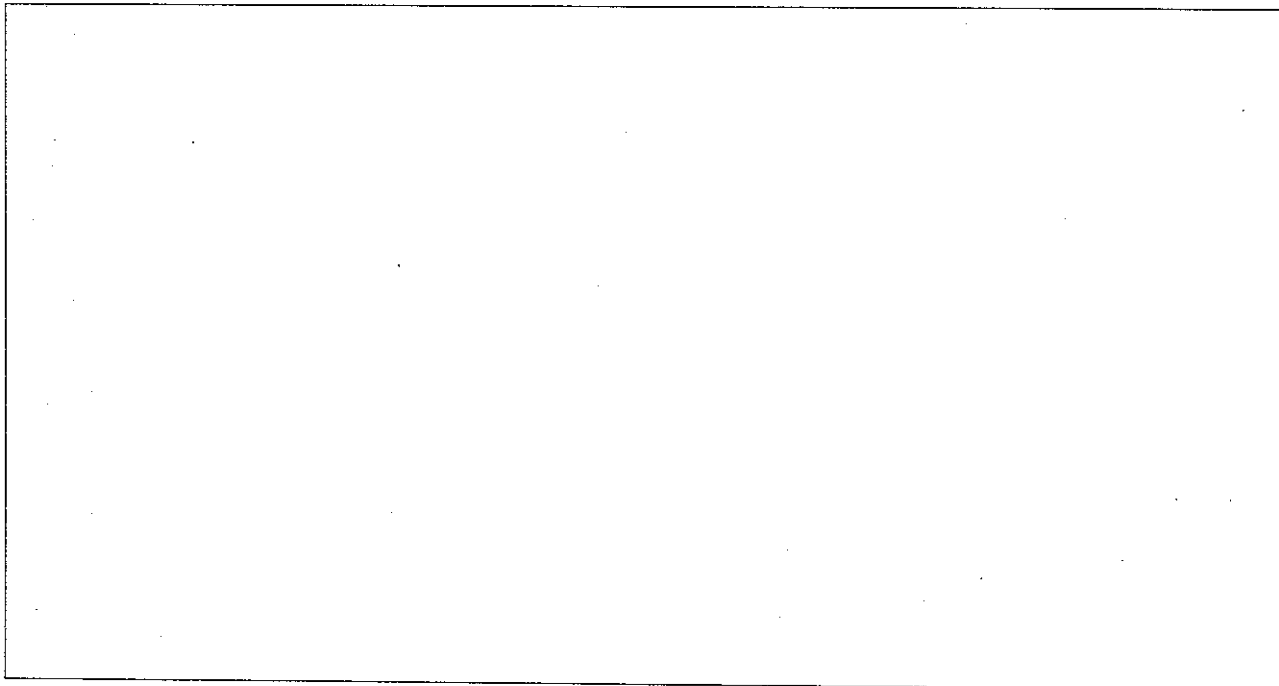
7. (4 punti) Al lancio di un dado si vince un euro se esce un numero pari e si perde un euro se esce il numero 5. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 40 euro?

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}0 = \frac{1}{3}, \sigma^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(0-\frac{1}{3}\right)^2 = 0,556$$

media $= n\mu = 33,33$ e deviazione standard $s = \sqrt{n\sigma^2} = 7,4535$

$$P(X > 40,5) = P\left(z > \frac{40,5 - \mu}{s}\right) = P(z > 0,96) = 0,5 - \Phi(0,96) = 0,5 - 0,33 = 0,17 = 17\%$$

8. (8 punti) Minimi e massimi relativi. Teorema di Fermat.



Nome

Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7} \log(2n^3 + 1) - \log \sqrt[7]{n^3 + 7}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{\sin^3(x)}$

(a) $\log \sqrt[7]{2}$

(b) $+\infty$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\sin(3\sqrt[6]{x} + 5)}{\sqrt[6]{x^4}} dx$.

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{x} = t &\Rightarrow x = t^6 & dx = 6t^5 dt & \sqrt[6]{x^4} = t^4 \\ &= \int \sin(3t+5) 6t dt = \text{parti} = - \frac{\cos(3t+5)}{3} 6t - \int \frac{\cos(3t+5)}{3} 6 dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = 4e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

$$\begin{aligned} x &\neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 4e^{-1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 4e^{-1} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 4e^{-1}$
no asint. obbl.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = e^{-2x} \sqrt{|x-2|}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \sqrt{x-2} & x \geq 2 \\ e^{-2x} \sqrt{2-x} & x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2e^{-2x} \sqrt{x-2} + e^{-2x} \frac{1}{2\sqrt{x-2}} & x > 2 \\ -2e^{-2x} \sqrt{2-x} + e^{-2x} \frac{(-1)}{2\sqrt{2-x}} & x < 2 \end{cases}$$

per $x > 2$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$ MAX REL.
 per $x < 2$
 f' devesi.
 $x = 2$ p. di min rel.

Computo 2

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = -\frac{1}{2} \sin(x) y - e^{-\cos(x)} \log\left(\frac{x}{x+5}\right) y^3$, definita nell'intervallo $[1, 2]$.

Bernoulli $z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow -\frac{z'}{2} = \frac{y'}{y^3} \Rightarrow -\frac{z'}{2} = -\frac{1}{2} \sin x z - e^{-\cos x} \log\left(\frac{x}{x+5}\right)$

$$z' = \sin x z + e^{-\cos x} \log\left(\frac{x}{x+5}\right)$$

$$z(x) = e^{-\cos x} \left[\int \log\left(\frac{x}{x+5}\right) dx + C \right] = \dots \text{ integr. per parti}$$

6. (4 punti) Durante l'estate in una postazione montana viene osservato il passaggio di un camoscio in media 8.5 volte alla settimana. Qual è la probabilità che in una giornata si vedano passare tre camosci?

Numero medio camosci $\bar{x} \quad \lambda = \frac{8,5}{7} = 1,21$

Distribuzione di Poisson di media 1,21 con $k=3$

$$P_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0,089 = 8,9\%$$

7. (4 punti) Al lancio di un dado si vincono 4 euro se esce il numero 4 e si perde un euro se esce un numero dispari. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 40 euro?

Procedimento su computo 1

$$\mu = 0,1667, \quad \sigma^2 = 3,1489, \quad m = 16,67, \quad S = 17,72$$

$$Z > 1,35 \Rightarrow P = 0,5 - 0,411 = 8,9\%$$

8. (8 punti) Teorema dei valori intermedi e Teorema della Media Integrale.

Nome

Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin(\frac{1}{n}))^{\log(1+\frac{1}{n})}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - e^{\sqrt{x}})}{1 - \cos(x)}$

(a) 1 (b) $-\infty$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} dx$.

$$\sqrt{x}+1 = t \Rightarrow \sqrt{x} = t-1 \Rightarrow x = (t-1)^2 \Rightarrow dx = 2(t-1)dt$$

$$\int \frac{\log t}{t^2} (2t-1) dt = 2 \int \frac{\log t}{t} - \int \frac{\log t}{t^2} = (\log t)^2 - \int \frac{\log t}{t}$$

$$\int \frac{\log t}{t^2} = -\frac{1}{t} \log t - \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \log t + \frac{1}{2t^2} + C.$$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{|x-1|}}$.

$x \neq 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

no asint. obliq.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = x e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

$x \neq 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}} \left[1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \right] = \frac{e^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^2} (1+x^2)$$

$f'(x)$ crescente no max ne min.

compito 3

5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 5 = 0$, con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-5} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

$$y(0) = C_1 = 0, \quad y'(x) = 4C_1 e^{2x} \cos x - C_1 e^{2x} \sin x + 2C_2 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x$$
$$y'(0) = C_2 = 2$$

6. (4 punti) In una coltura cellulare sono state marcate 97 cellule. Esaminando al microscopio lo 0.7% delle cellule dell'intera coltura, qual è la probabilità di trovarne esattamente 3 marcate?

Svolgimento primo compito

$$P = 2,6\%$$

7. (4 punti) Al lancio di un dado si vincono 3 euro se esce un numero pari e si perdono 2 euro se esce il numero 5. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 90 euro?

Svolgimento primo compito:

$$\mu = 1,1667, \quad \sigma^2 = 3,806, \quad m = 116,67, \quad s = 19,51$$

$$Z > 0,197 \quad P = 0,5 - 0,07 = 42\%$$

8. (8 punti) Teorema di Lagrange e caratterizzazione delle primitive.

Nome

Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n) \frac{\log(n^2 + 5n + 1)}{\sqrt[3]{n} + 2}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log(1+x^2)(\sin(x^2) - 2)}$

(a) 0

(b) $-\infty$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\sqrt{x-1}-3}{x+1-3\sqrt{x-1}} dx$.

$\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$= 2 \int \frac{t^2 - 3t}{t^2 + 1 - 3t + 1} = 2 \int \frac{t^2 - 3t}{t^2 - 3t + 2} = 2 \int \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 3t + 2} - 4 \int \frac{1}{t^2 - 3t + 2} =$

$\boxed{t^2 - 3t + 2 = 0 \quad t = 1 \text{ e } t = 2} = \text{Razun.}$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{\log(x-1)}{\sqrt{|x-3|}}$.
 $x \in]1, 3[\cup]3, +\infty[$

$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x-3}} & x > 3 \\ \frac{\log(x-1)}{\sqrt{3-x}} & 1 < x < 3 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$x = 1$ e $x = 3$
asint. verticali

$x = 0$ asint. orizz.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1} + 5x$

$e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$

$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - 2e^x e^x}{(e^x - 1)^2} + 5 =$
 $= \frac{5e^{2x} + 5(e^{2x} - 1 - 2e^x)}{(e^x - 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5e^{2x} - 12e^x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{11}}{5}$

$\frac{6 - \sqrt{11}}{5}$ max. rel.

$\frac{6 + \sqrt{11}}{5}$ Min. Rel.

compito 4

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = -\frac{y}{x} + x^3 \log(x+1)y^4$.

$$z = \frac{1}{y^3} \Rightarrow z' = -3y^{-4}y' \Rightarrow y^{-4}y' = -\frac{z'}{3}$$

$$-\frac{z'}{3} = -\frac{z}{x} + x^3 \log(x+1) \Rightarrow z' = \frac{3z}{x} - 3x^3 \log(x+1)$$

$$z(x) = e^{\log(x^3)} \left[3 \int e^{-\log(x^3)} x^3 \log(x+1) dx + C \right] = x^3 \left[\int \log(x+1) dx + C \right] \quad \text{per parti}$$

6. (4 punti) Durante l'estate in una postazione montana viene osservato il passaggio di un camoscio in media 0.85 volte al giorno. Qual è la probabilità che in una settimana si vedano passare 3 camosci?

procedim. 2 compiti:

$$\lambda = 0,85 \cdot 7 = 5,95 \quad P = 9,1\%$$

7. (4 punti) Al lancio di un dado si vincono 6 euro se esce il numero 4 e si perde un euro se esce un numero dispari. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 60 euro?

procedimento 1 compito:

$$\mu = 0,5 \quad , \quad \sigma^2 = 6,25 \quad m = 50 \quad s = 25$$

$$z > 0,42 \quad P = 0,5 - 0,16 = 34\%$$

8. (8 punti) Funzioni monotone. Condizioni necessarie e sufficienti per la monotonia di una funzione.

Nome

Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+n^2)}{\log(1+n)}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3(x) \cos(\frac{1}{x})}{e^{x^2} - 1}$.

(a) 2

(b) 0

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\sin(x)(\cos(x) - 5)}{3 + \cos^2(x)} dx$.

$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$

$= -\int \frac{t-5}{3+t^2} dt = -\int \frac{t}{3+t^2} dt + 5 \int \frac{1}{3+t^2} = \frac{1}{2} \log(t^2+3) - 5 \arctan(\frac{t}{\sqrt{3}}) + C$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = e^{-2x} \sqrt{|x-2|}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) = \sqrt{2}$
 $f(2) = 0$

$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \sqrt{x-2} & x \geq 2 \\ e^{-2x} \sqrt{2-x} & x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

no asint. d'obbl.

no un punto singolare.

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$f(x) = \frac{e^x + 9}{\sqrt{e^x - 4}}$

$x > \log 4$

$\lim_{x \rightarrow (\log 4)^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{e^x - 4})^2} \left[e^x \sqrt{e^x - 4} - \frac{(e^x + 9) e^x}{2 \sqrt{e^x - 4}} \right]$
 $= \frac{e^x}{(\sqrt{e^x - 4})^2} \left[\frac{2(e^x - 4) - (e^x + 9)}{2 \sqrt{e^x - 4}} \right]$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \quad f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 17 \geq 0 \Rightarrow x = \log 17$ min rel. ass.

Computo 5

5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = -\frac{2}{x}y + \frac{e^{-x} - e^x}{x}$, tale che $y(1) = 0$.

Eqv. diff. lineare. $A(x) = -\int \frac{2}{x} = -\log(x^2)$

$$y(x) = e^{-\log(x^2)} \int e^{\log(x^2)} \cdot \frac{e^{-x} - e^x}{x} = \frac{1}{x^2} \left[\int x(e^{-x} - e^x) dx + C \right]$$

part.

$$y(x) = \frac{1}{x^2} [-x e^{-x} - x e^x + e^{-x} - e^x + C]$$

$$C = 2e$$

6. (4 punti) In una coltura cellulare sono state marcate 97 cellule. Esaminando al microscopio lo 0.8% delle cellule dell'intera coltura, qual è la probabilità di trovarne esattamente 3 marcate?

Vedi procedimenti compito 1

$$P = 3,5\%$$

7. (4 punti) Al lancio di un dado si vincono 3 euro se esce un numero pari e si perde 1 euro se esce il numero 5. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 150 euro?

Vedi procedimenti compito 1

$$\mu = 1,333 \quad , \quad \sigma^2 = 2,889$$

$$\mu = 133,3$$

$$s = 17,00$$

$$z > 1,01 \Rightarrow P = 0,5 - 0,34 = 16\%$$

8. (8 punti) Definizione di limite e teoremi del confronto.

Nome

Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 5\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 2} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 - e^x)}{\cos(x) - 1}$

(a) 0

(b) 2

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = t &\Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt & \sqrt{x} = t^2 \\ &= \int \frac{2t dt}{t(1-t^2)} = \int \frac{2 dt}{1-t^2} = -4 \int \frac{t^2}{t^2-1} = -4 \int \frac{t^2-1}{t^2-1} + 4 \int \frac{1}{t^2-1} \\ &= \ln|1+t| + \dots \end{aligned}$$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{e^x + 9}{\sqrt{e^x + 4}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{9}{2}$
 no punti singolari
 no asint. obliq.
 asintoto orizz. a $-\infty$

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{|x-1|}}$

$x \neq 1$
 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases}$
 $f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(2x-3)}{2(\sqrt{x-1})^2\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ \frac{e^x(2(1-x)+1)}{2(\sqrt{1-x})^2\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases}$
 $x > 1 \quad x = \frac{3}{2}$ Min. Rel.
 $x < 1$ presente $f' > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = +\infty$

computo 6

5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 6y' + 9y = 0$, tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 5$.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \quad y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

$$y(0) = C_1 = 2$$

$$y'(x) = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + C_2 x \cdot 3e^{3x} \Rightarrow y'(0) = 6 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = -1$$

6. (4 punti) Durante l'estate in una postazione montana viene osservato il passaggio di un camoscio in media 9.5 volte alla settimana. Qual è la probabilità che in una giornata si vedano passare tre camosci?

procedimento secondo computo:

$$\lambda = \frac{9.5}{7} = 1,36 \quad p = 10,8\%$$

7. (4 punti) Al lancio di un dado si vincono 5 euro se esce il numero 5 e si perde un euro se esce un numero pari. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 40 euro?

procedimento primo computo:

$$\mu = 0,333 \quad , \quad \sigma^2 = 4,5556 \quad , \quad m = 33,3 \quad s = 21,36$$

$$z > 0,36 \Rightarrow p = 0,5 - 0,13 = 37\%$$

8. (8 punti) Modello di Malthus ed equazioni differenziali lineari.