

# L'integrale di Riemann

28 agosto 2023

**Definizione 1** (misura di un intervallo). Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo limitato non vuoto. Definiamo la misura di  $I$  come

$$m(I) = \sup I - \inf I$$

ovvero la distanza tra i due estremi dell'intervallo. Se  $I$  è vuoto definiamo, per convenzione,  $m(I) = 0$ .

Si ha, ad esempio:

$$m([1, 3]) = m((1, 3]) = 2.$$

Osserviamo che se un intervallo  $I$  è unione di intervalli disgiunti  $I_1, I_2, \dots, I_n$  allora si ha (additività della misura)

$$m(I) = m(I_1) + \dots + m(I_n).$$

**Definizione 2** (funzione caratteristica). Se  $A \subset \mathbb{R}$  è un insieme, definiamo la funzione  $\varphi_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione  $\varphi_A$  si chiama funzione caratteristica di  $A$ .

**Definizione 3** (funzione semplice). Una funzione  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice semplice se esiste  $N \in \mathbb{N}$ , e per ogni  $k = 1, \dots, N$  esistono  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ , e intervalli non vuoti  $I_k \subset [a, b]$  tali che

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k}(x).$$

Indicheremo con  $\mathcal{S}_a^b$  l'insieme delle funzioni semplici definite su  $[a, b]$ .

Ricordiamo che lo spazio di funzioni  $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$  è uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$ . Infatti in modo naturale sono definiti la somma di due funzioni e il prodotto di una funzione per un numero reale:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Osserviamo allora che  $\mathcal{S}_a^b$  è lo spazio generato (lo *span*) dall'insieme di tutte le funzioni caratteristiche  $\varphi_I$ , con  $I$  intervallo contenuto in  $[a, b]$ , all'interno dello spazio vettoriale di tutte le funzioni  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Non è detto che gli intervalli  $I_k$  che definiscono una funzione semplice siano tra loro disgiunti. Non è neanche detto che l'unione di tutti gli  $I_k$  sia l'intero intervallo  $[a, b]$ . Nel lemma seguente mostriamo tuttavia che suddividendo opportunamente gli intervalli, è possibile ricondursi da una suddivisione  $I_k$  qualunque ad una suddivisione  $J_k$  formata da intervalli disgiunti la cui unione è tutto l'intervallo  $[a, b]$ .

**Lemma 4.** Sia  $f \in \mathcal{S}_a^b$  tale che

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k}(x)$$

per opportuni coefficienti  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  e intervalli  $I_k \subset [a, b]$ . Allora esistono  $\mu_k$  e  $J_k$  con  $k = 1, \dots, M$  tali che

$$f(x) = \sum_{k=1}^M \mu_k \varphi_{J_k}(x), \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) = \sum_{k=1}^M \mu_k m(J_k)$$

e inoltre posto  $a_k = \inf J_k$ ,  $b_k = \sup J_k$  si ha:

$$a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq b_2 = a_3 \leq \dots \leq b_{M-1} = a_M \leq b_M = b.$$

*Dimostrazione.* Sia  $X$  l'insieme contenente gli estremi di tutti gli intervalli  $I_k$  e i punti  $a$  e  $b$ . L'insieme  $X$  avrà al più  $2N + 2$  elementi che, ordinati, potremo chiamare  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Consideriamo allora i  $2n - 1$  intervalli  $J_1 = \{x_1\}$ ,  $J_2 = (x_1, x_2)$ ,  $J_3 = \{x_2\}$ ,  $J_4 = (x_2, x_3)$ ,  $J_5 = \{x_3\}$ ,  $\dots$ ,  $J_{2n-3} = \{x_{n-1}\}$ ,  $J_{2n-2} = (x_{n-1}, x_n)$ ,  $J_{2n-1} = \{x_n\}$ . Gli intervalli  $J_k$  hanno la proprietà richiesta. Ora poniamo

$$\mu_k = \sum_{j: I_j \supseteq J_k} \lambda_j$$

cosciché

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j m(I_j) = \sum_{k=1}^M \mu_k m(J_k)$$

in quanto ogni  $I_k$  potrà essere scritto come unione disgiunta di intervalli  $J_k$  e quindi la funzione  $\lambda_k \varphi_{I_k}$  potrà essere sostituita con una somma di  $\lambda_k \varphi_{J_i}$ . D'altra parte con questa sostituzione la quantità  $\lambda_k m(I_k)$  sarà uguale alla somma dei  $\lambda_k m(J_i)$  per l'additività della misura degli intervalli.  $\square$

**Lemma 5.** Sia  $f \in \mathcal{S}_a^b$  tale che

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k}(x)$$

per opportuni coefficienti  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  e intervalli  $I_k \subset [a, b]$ . Allora

$$f \geq 0 \implies \sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) \geq 0.$$

In particolare se  $f = 0$  possiamo applicare il risultato sia a  $f$  che a  $-f$  ottenendo

$$f = 0 \implies \sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) = 0.$$

*Dimostrazione.* Per quanto visto nel lemma precedente possiamo supporre che gli intervalli  $I_k$  siano a due a due disgiunti. In tal caso se  $x \in I_k$  si ha  $f(x) = \lambda_k$  e quindi  $\lambda_k \geq 0$  per ogni  $k$ . Di conseguenza essendo  $m(I_k) \geq 0$ , si ha

$$\sum_k \lambda_k m(I_k) \geq 0.$$

$\square$

**Definizione 6** (integrale di una funzione semplice). Sia  $f \in \mathcal{S}_a^b$ . Se  $f$  si rappresenta come

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k}(x)$$

definiamo

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) \quad (1)$$

che potremo anche indicare con  $\int_a^b f(x) dx$  e chiameremo integrale di  $f$  su  $[a, b]$ .

La definizione precedente è ben posta in quanto se  $f$  viene rappresentata con due diverse combinazioni di funzioni caratteristiche:

$$f = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k} = \sum_{k=1}^M \mu_k \varphi_{J_k}$$

avremmo

$$0 = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k} + \sum_{k=1}^M (-\mu_k) \varphi_{J_k}$$

e per il lemma precedente si avrebbe

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) + \sum_{k=1}^M (-\mu_k) m(J_k) = 0$$

da cui

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) = \sum_{k=1}^M \mu_k m(J_k).$$

Questo significa che la definizione precedente non dipende da come la funzione possa essere rappresentata, e quindi è una buona definizione.

**Teorema 7** (proprietà dell'integrale di funzioni semplici). Le funzioni semplici soddisfano le seguenti proprietà:

1. (monotonia) se  $f, g \in \mathcal{S}_a^b$

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

2. (linearità) se  $f, g \in \mathcal{S}_a^b$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

3. (additività rispetto al dominio) se  $a \leq b \leq c$

$$f \in \mathcal{S}_a^c \iff f|_{[a,b]} \in \mathcal{S}_a^b \text{ e } f|_{[b,c]} \in \mathcal{S}_b^c$$

inoltre se  $f \in \mathcal{S}_a^c$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

*Dimostrazione.* Il punto (i) è una immediata conseguenza del lemma precedente, applicato alla funzione  $g - f$ .

Per il punto (ii) scriviamo

$$f = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k}, \quad g = \sum_{k=1}^M \mu_k \varphi_{J_k}$$

e, di conseguenza,

$$\lambda f + \mu g = \sum_{k=1}^N \lambda \lambda_k \varphi_{I_k} + \sum_{k=1}^M \mu \mu_k \varphi_{J_k}.$$

Dunque

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \sum_{k=1}^N \lambda \lambda_k m(I_k) + \sum_{k=1}^M \mu \mu_k m(I_k) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Per quanto riguarda il punto (iii) osserviamo che se

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_{I_k}$$

con  $I_k$  intervalli contenuti in  $[a, c]$ , allora la restrizione di  $f$  ad  $[a, b]$  si ottiene rimpiazzando ogni  $I_k$  con  $I_k \cap [a, b]$  che è ancora un intervallo (eventualmente vuoto). Inoltre se considero le due restrizioni  $f|_{[a, b]}$  e  $f|_{[b, c]}$  ogni intervallo  $I_k$  viene suddiviso in due parti  $I_k = (I_k \cap [a, b]) \cup (I_k \cap [b, c])$  ma risulta  $m(I_k) = m(I_k \cap [a, b]) + m(I_k \cap [b, c])$  e da questo si verifica quindi che l'additività rispetto al dominio è soddisfatta da tutte le funzioni caratteristiche  $\varphi_{I_k}$  e di conseguenza da tutte le funzioni semplici  $\sum_k \lambda_k \varphi_{I_k}$ .

Resta da osservare che se  $f|_{[a, b]}$  e  $f|_{[b, c]}$  sono funzioni semplici, allora anche  $f$  lo è. Per far questo osserviamo che posto  $g = f|_{[a, b]} + f|_{[b, c]}$  si ha che  $g$  è una funzione semplice e  $f$  coincide con  $g$  in tutti i punti tranne che nel punto  $b$ , in cui si ha  $g(b) = 2f(b)$ . Questo perché il punto  $b$  sta in entrambi gli intervalli  $[a, b]$  e  $[b, c]$ . Ma allora si ha  $f = g - f(b)\varphi_{[b, b]}$  che è comunque una funzione semplice.  $\square$

**Definizione 8** (integrale di Riemann). *Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Posto*

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi: \varphi \in \mathcal{S}_a^b, \varphi \leq f \right\}$$

$$B = \left\{ \int_a^b \psi: \psi \in \mathcal{S}_a^b, \psi \geq f \right\}$$

*diremo che  $f$  è Riemann-integrabile se  $\sup A = \inf B$  e definiremo l'integrale di  $f$  tra  $a$  e  $b$  come*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \sup A = \inf B.$$

*Denoteremo con  $\mathcal{R}_a^b$  l'insieme delle funzioni Riemann-integrabili.*

Osserviamo che dire che  $f$  è limitata è equivalente a dire che esiste un numero  $\lambda$  tale che  $-\lambda \varphi_{[a, b]} \leq f \leq \lambda \varphi_{[a, b]}$  dunque gli insiemi  $A$  e  $B$  non possono essere vuoti. Inoltre se  $\varphi \leq f$ ,  $\psi \geq f$  e  $\varphi, \psi$  sono funzioni semplici, allora essendo  $\varphi \leq \psi$  si ha  $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$ . Questo significa che  $A$  e  $B$  sono *separati* cioè presi  $a \in A$  e  $b \in B$  si ha  $a \leq b$ . Dunque è sempre vero che  $\sup A \leq \inf B$  e richiedere che valga l'uguaglianza

$\sup A = \inf B$  è equivalente a richiedere che  $A$  e  $B$  abbiano un unico elemento di separazione.

Osserviamo inoltre che se  $f$  è una funzione semplice risulta banalmente che  $f$  è Riemann-integrabile, in quanto scegliendo  $\varphi = \psi = f$  si ha banalmente  $\varphi \leq f \leq \psi$  e  $\int_a^b \varphi = \int_a^b \psi$ , dunque gli insiemi  $A$  e  $B$  della definizione precedente hanno un punto in comune.

**Lemma 9** (criteri di integrabilità). *Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Se  $f$  è Riemann-integrabile allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esistono  $\varphi_n, \psi_n$  funzioni semplici tali che  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e tali che  $\lim_n \int_a^b \varphi_n = \lim_n \int_a^b \psi_n = \int_a^b f$ . Viceversa se esistono  $\varphi_n, \psi_n$  funzioni semplici con  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  e  $\lim_n \int_a^b \varphi_n = L = \lim_n \int_a^b \psi_n$  allora  $f$  è Riemann-integrabile e  $\int_a^b f = L$ .*

*Dimostrazione.* Dalle proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore sappiamo che se  $A$  e  $B$  non sono vuoti devono esistere delle successioni  $a_n \in A$  e  $b_n \in B$  tali che  $\lim_n a_n = \inf A = \int_a^b f$  e  $\lim_n b_n = \sup B = \int_a^b f$ . In corrispondenza ai valori  $a_n$  e  $b_n$  devono quindi esistere delle funzioni semplici  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  con  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  e  $\int_a^b \varphi_n = a_n$ ,  $\int_a^b \psi_n = b_n$ . Dunque la prima parte del lemma è dimostrata.

Viceversa se esistono le funzioni semplici  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  con le proprietà indicate, posto  $a_n = \int_a^b \varphi_n$ ,  $b_n = \int_a^b \psi_n$  si ha che  $a_n \in A$  e  $b_n \in B$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e dunque  $L = \lim_n a_n \leq \sup A \leq \inf B \leq \lim_n b_n = L$ . Di conseguenza deve essere  $\sup A = \inf B = L$  e dunque  $f$  è Riemann-integrabile e il suo integrale vale  $L$ .  $\square$

**Teorema 10** (proprietà delle funzioni Riemann-integrabili). *Valgono le seguenti proprietà:*

1. (monotonia) se  $f, g$  sono Riemann-integrabili allora

$$f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g;$$

2. (linearità) se  $f, g$  sono Riemann-integrabili e  $\lambda \in \mathbb{R}$  allora anche  $f + g$  e  $\lambda f$  sono Riemann integrabili, inoltre vale

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f;$$

3. (additività rispetto al dominio) se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione Riemann-integrabile e  $[a', b'] \subset [a, b]$  allora  $f|_{[a', b']}$  è pure Riemann-integrabile; viceversa se  $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione limitata e scelto  $b \in [a, c]$  risulta che  $f|_{[a, b]}$  e  $f|_{[b, c]}$  sono entrambe Riemann-integrabili allora anche  $f$  è Riemann-integrabile e vale

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

*Dimostrazione.* Se  $f$  e  $g$  sono Riemann integrabili possiamo trovare, per il lemma precedente, due successioni di funzioni semplici  $\varphi_n \leq f$  e  $\psi_n \geq g$  tali che  $\int_a^b \varphi_n \rightarrow \int_a^b f$  e  $\int_a^b \psi_n \rightarrow \int_a^b g$ . Ma essendo  $\varphi_n \leq f \leq g \leq \psi_n$ , applicando la monotonia dell'integrale per le funzioni semplici, sappiamo che  $\int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b \psi_n$  e, passando al limite si ottiene la proprietà:  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

Per quanto riguarda la somma  $f + g$ , possiamo prendere delle funzioni semplici  $f_n^- \leq f \leq f_n^+$  e  $g_n^- \leq g \leq g_n^+$  tali che  $\lim_n \int_a^b f_n^- = \lim_n \int_a^b f_n^+ = \int_a^b f$  e  $\lim_n \int_a^b g_n^- =$

$\lim_n \int_a^b g_n^+ = \int_a^b g$ . Ma sulle funzioni semplici abbiamo già mostrato la linearità e quindi abbiamo

$$\lim_n \int_a^b (f_n^- + g_n^-) = \lim_n \int_a^b f_n^- + \lim_n \int_a^b g_n^- = \int_a^b f + \int_a^b g$$

e

$$\lim_n \int_a^b (f_n^+ + g_n^+) = \lim_n \int_a^b f_n^+ + \lim_n \int_a^b g_n^+ = \int_a^b f + \int_a^b g$$

e quindi abbiamo trovato le funzioni semplici  $(f_n^- + g_n^-) \leq f + g \leq (f_n^+ + g_n^+)$  i cui integrali convergono allo stesso valore  $\int_a^b f + \int_a^b g$ . Ne consegue che  $f + g$  è integrabile e l'integrale è la somma degli integrali.

Se  $\lambda \geq 0$  e  $f$  è Riemann-integrabile possiamo trovare delle funzioni semplici  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  tali che  $\lim_n \int_a^b \varphi_n = \lim_n \int_a^b \psi_n = \int_a^b f$ . Ma allora  $\lambda\varphi_n$  e  $\lambda\psi_n$  sono anch'esse funzioni semplici e vale  $\lambda\varphi_n \leq \lambda f \leq \lambda\psi_n$  e sfruttando la linearità dell'integrale sulle funzioni semplici, si trova che

$$\lim_n \int_a^b \lambda\varphi_n = \lim_n \lambda \int_a^b \varphi_n = \lambda \int_a^b f$$

e

$$\lim_n \int_a^b \lambda\psi_n = \lim_n \lambda \int_a^b \psi_n = \lambda \int_a^b f$$

dunque si può concludere che  $\lambda f$  è Riemann-integrabile e il suo integrale vale  $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ .

Se  $\lambda < 0$  si ripete lo stesso ragionamento con l'accortezza di osservare che se  $\varphi \leq f \leq \psi$  allora  $\lambda\varphi \geq \lambda f \geq \lambda\psi$  e quindi nell'approssimare  $\lambda f$  le funzioni semplici superiori si scambiano con quelle inferiori.

Consideriamo ora l'additività rispetto al dominio. Innanzitutto osserviamo che se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è Riemann-integrabile allora abbiamo delle funzioni semplici  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  definite su  $[a, b]$  tali che  $\lim_n \int_a^b \varphi_n = \lim_n \int_a^b \psi_n = \int_a^b f$ . Inoltre sappiamo che vale l'additività per le funzioni semplici e quindi

$$\int_a^b \varphi_n = \int_a^{a'} \varphi_n + \int_{a'}^{b'} \varphi_n + \int_{b'}^b \varphi_n,$$

$$\int_a^b \psi_n = \int_a^{a'} \psi_n + \int_{a'}^{b'} \psi_n + \int_{b'}^b \psi_n$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{a'}^{b'} (\psi_n - \varphi_n) &= \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) + \int_a^{a'} (\psi_n - \varphi_n) + \int_{b'}^b (\psi_n - \varphi_n) \\ &\leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \varphi_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Risulta quindi che  $f$  è integrabile su  $[a', b']$ .

Se, viceversa,  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  e su  $[b, c]$  allora esistono le funzioni semplici  $\varphi'_n \leq f \leq \psi'_n$  su  $[a, b]$  e  $\varphi''_n \leq f \leq \psi''_n$  su  $[b, c]$  tali che

$$\lim_n \int_a^b \varphi'_n = \lim_n \int_a^b \psi'_n = \int_a^b f$$

e

$$\lim_n \int_b^c \varphi''_n = \lim_n \int_b^c \psi''_n = \int_b^c f.$$

Ma allora le funzioni  $\varphi_n = \varphi'_n + \varphi'_n - f(b)\varphi_{[b,b]}$  e  $\psi_n = \psi'_n + \psi'_n - f(b)\psi_{[b,b]}$  sono funzioni semplici che soddisfano  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$  e

$$\begin{aligned}\int_a^c \varphi_n &= \int_a^b \varphi'_n + \int_b^c \varphi''_n - 0 \rightarrow \int_a^b f + \int_b^c f \\ \int_a^c \psi_n &= \int_a^b \psi'_n + \int_b^c \psi''_n - 0 \rightarrow \int_a^b f + \int_b^c f\end{aligned}$$

da cui si ottiene che  $f$  è integrabile su tutto  $[a, c]$  e l'integrale su  $[a, c]$  è la somma degli integrali su  $[a, b]$  e  $[b, c]$ .  $\square$

Osserviamo, come conseguenza di queste proprietà generali, che vale:

$$\int_a^b 0 = 0$$

e

$$\int_a^a f = 0.$$

*Esempio 11* (funzione non Riemann-integrabile). Sia  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = \phi_{\mathbb{Q}}$ . Allora  $f$  non è Riemann-integrabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\phi$  una qualunque funzione semplice  $\phi \leq f$ . Allora possiamo scrivere

$$\phi = \sum_{k=1}^N \lambda_k \phi_{I_k}.$$

con  $I_k$  intervalli disgiunti. Se  $m(I_k) > 0$  l'intervallo  $I_k$  contiene almeno un numero irrazionale  $x$ , su cui  $f(x) = 0$ . Dunque  $\lambda_k = \phi(x) \leq f(x) = 0$ . Dunque  $\lambda_k m(I_k) \leq 0$  per ogni  $k$  e quindi

$$\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) \leq 0.$$

Se invece prendiamo una qualunque funzione semplice  $\psi \geq f$  e scriviamo

$$\psi = \sum_{k=1}^M \mu_k \phi_{J_k}$$

con  $J_k$  intervalli disgiunti non vuoti possiamo affermare che se  $m(J_k) > 0$  allora l'intervallo  $J_k$  deve contenere almeno un punto  $x$  razionale e dunque  $\mu_k = \psi(x) \geq f(x) = 1$ . Dunque

$$\int_a^b \psi = \sum_{k=1}^M \mu_k m(J_k) \geq \sum_{k=1}^M m(J_k).$$

Ora posto  $\inf J_k = a_k$ ,  $\sup J_k = b_k$  e ordinando gli intervalli in modo che  $a_k \leq b_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1}$  si dovrà avere  $a_1 = 0$ ,  $a_{k+1} = b_k$ ,  $b_M = 1$  e quindi

$$\sum_{k=1}^M m(J_k) = \sum_{k=1}^M (b_k - a_k) = b_M - a_1 = 1.$$

Abbiamo quindi verificato che l'insieme  $A$  degli integrali delle funzioni semplici minori di  $f$  verifica  $\sup A \leq 0$  mentre l'insieme  $B$  degli integrali delle funzioni semplici maggiori di  $f$  verifica  $\inf B \geq 1$ . Dunque la funzione  $f$  non è Riemann-integrabile.  $\square$