Analisi Matematica
Prova scritta parziale n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

19 dicembre 2019

1. Studiare la convergenza semplice e assoluta della seguente serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_k \frac{1 - x^k \cdot \ln k}{k \cdot \ln(x^2 + k)}.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che fissato $x \in \mathbb{R}$ si ha $\ln(x^2+k) \sim \ln k$ per $k \to +\infty$, infatti:

$$\frac{\ln(x^2+k)}{\ln k} = \frac{\ln\left(k \cdot \left(\frac{x^2}{k} + 1\right)\right)}{\ln k} = \frac{\ln k + \ln\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)}{\ln k} \to 1.$$

Cominciamo con lo studio della convergenza assoluta. Sia a_k il termine generico della serie. Se $|x| > 1$ si ha:

$$|a_k| = \frac{\left|x^k \cdot \ln k - 1\right|}{k \cdot \ln(x^2+k)} \sim \frac{\left|x^k \cdot \ln k - 1\right|}{k \cdot \ln k} = \frac{|x|^k \cdot \left|1 - \frac{1}{x^k \cdot \ln k}\right|}{k}.$$

Dopo aver verificato che $\sqrt[k]{a_k} \sim \sqrt[k]{b_k}$ se $a_k \sim b_k$ possiamo allora affermare che per $k \to +\infty$ si ha

$$\sqrt[k]{|a_k|} \sim |x| \frac{\sqrt[k]{\left|1 - \frac{1}{x^k \cdot \ln k}\right|}}{\sqrt[k]{k}} \to |x|.$$

Dunque se $|x| > 1$ per il criterio della radice si ha $|a_k| \to +\infty$ e dunque la serie non può convergere. Se invece $|x| < 1$ si ha $x^k \ln k \to 0$ e quindi

$$a_k \sim \frac{1}{k \cdot \ln(x^2+k)} \sim \frac{1}{k \cdot \ln k}.$$

La serie è definitivamente a termini positivi, ed ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{k \cdot \ln k}$ che notoriamente è divergente (per il criterio di condensazione di Cauchy).

Se $x = 1$ si ha
$$-a_k = \frac{(\ln k) - 1}{k \cdot \ln(x^2 + k)} \sim \frac{1}{k}$$
e dunque la serie $\sum a_k$ diverge a $-\infty$.

Se $x = -1$ possiamo spezzare la serie in tre addendi:
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k \ln(1+k)} - (-1)^k \frac{\ln k}{k \ln(1+k)} \\ &= \left[\frac{1}{k \ln(1+k)}\right] - \left[\frac{(-1)^k}{k}\right] + \left[(-1)^k \cdot \frac{\ln(1+k) - \ln k}{k \ln(1+k)}\right]. \end{aligned}$$

Per il primo addendo si ha:
$$\frac{1}{k \ln(1+k)} \sim \frac{1}{k \ln k}$$
e dunque la serie corrispondente è divergente.

Per il secondo addendo abbiamo la serie armonica a segni alterni che è notoriamente convergente per il criterio di Leibniz.

Per il terzo addendo, chiamiamolo b_n, si ha
$$|b_n| = \frac{\ln(1+k) - \ln k}{k \cdot \ln(1+k)} = \frac{\ln \frac{1+k}{k}}{k \cdot \ln(1+k)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k \cdot \ln(1+k)}$$
ma ora ci ricordiamo il limite notevole
$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k}$$
da cui
$$|b_n| \sim \frac{\frac{1}{k}}{k \cdot \ln(1+k)} \ll \frac{1}{k^2}.$$
Dunque la serie $\sum b_k$ è assolutamente convergente in quanto la serie $\sum \frac{1}{k^2}$ è convergente.

In definitiva, per $x = -1$, abbiamo spezzato a_k nella somma di tre addendi: la serie dei primi addendi diverge mentre la serie degli altri due addendi converge. Possiamo quindi concludere che in questo caso la serie diverge.

Concludiamo che la serie non converge (tantomeno assolutamente) per alcun $x \in \mathbb{R}$. $\square$

2. Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k \cdot (\sqrt{k} - 2)}{\sqrt{k!}}.$$

(a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente;

(b) calcolare la somma della serie per $x = 2$.

Soluzione. Posto $a_k = \frac{x^k \cdot (\sqrt{k}-2)}{\sqrt{k!}}$ si ha

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| \cdot \frac{\sqrt{k+1}-2}{\sqrt{k}-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} \to 0, \qquad \text{per } k \to +\infty$$

dunque la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $x = 2$ si ha

$$a_k = \frac{2^k(\sqrt{k}-2)}{\sqrt{k!}} = \frac{2^k}{\sqrt{(k-1)!}} - \frac{2^{k+1}}{\sqrt{k!}}$$

dunque la serie è telescopica:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^k}{\sqrt{(k-1)!}} - \frac{2^{k+1}}{\sqrt{k!}} \right) = 2 - \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n!}} = 2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{4^n}{n!}}$$

e, ricordando che $4^n \ll n!$ per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2.$$

□

3. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \frac{3}{4}. \end{cases}$$

(a) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare (se esiste) il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$;

(b) nel caso $\alpha = 2019/2020$ dimostrare che $|2 \cdot a_5 - 1| < 10^{-9}$.

Soluzione. La funzione $f(x) = x^2 - x + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ ha come grafico una parabola (traslata di $y = x^2$) con vertice nel punto di coordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e intersezione con la bisettrice $y = x$ nel vertice e nel punto di coordinate $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Dunque $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ sono gli unici punti fissi di $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Per $x > \frac{3}{2}$ e per $x < \frac{1}{2}$ si ha $f(x) > x$ mentre per $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ si ha $f(x) < x$. L'intervallo $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ è invariante in quanto $x > \frac{3}{2}$ implica $f(x) > x > \frac{3}{2}$. Dunque se $\alpha > \frac{3}{2}$ si ha $a_n > \frac{3}{2}$ per ogni n e a_n è crescente. Dunque a_n ammette limite che però non può essere un punto fisso e dunque $a_n \to +\infty$.

Se $\alpha = \frac{3}{2}$ allora $a_n = \frac{3}{2}$ per ogni n e dunque $a_n \to \frac{3}{2}$.

Anche l'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ è invariante perché se $x < \frac{3}{2}$ allora $f(x) < x < \frac{3}{2}$. Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) \geq \frac{1}{2}$. Dunque se $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ la successione a_n rimane in tale intervallo ed è quindi decrescente. Il limite non può che essere il punto fisso $\frac{1}{2}$.

Se $\alpha < \frac{1}{2}$ osserviamo che $f(\alpha) > \frac{1}{2}$ e quindi ci si riconduce ai casi precedenti. Più precisamente osserviamo che se $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ si ha $f(\alpha) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e quindi la successione per $n \geq 1$ sta in quest'ultimo intervallo, è decrescente e tende a $\frac{1}{2}$.

Se $\alpha = -\frac{1}{2}$ allora $a_1 = f(\alpha) = \frac{3}{2}$ e per ogni $n \geq 1$ si ha $a_n = \frac{3}{2}$ e dunque $a_n \to \frac{3}{2}$.

Se $\alpha < -\frac{1}{2}$ allora $a_1 = f(\alpha) > \frac{3}{2}$ e per ogni $n \geq 1$ si ha $a_n > \frac{3}{2}$, a_n è crescente e $a_n \to +\infty$.

Vediamo ora il punto (b). Posto

$$b_n = |2 \cdot a_n - 1|$$

osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} b_{n+1} = |2 \cdot a_{n+1} - 1| &= \left|2 \cdot (a_n^2 - a_n + \frac{3}{4}) - 1\right| \\ &= \left|2a_n^2 - 2a_n + \frac{1}{2}\right| = 2\left|a_n - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{b_n^2}{2}. \end{aligned}$$

Mentre $b_0 = |2\alpha - 1| = \frac{2 \cdot 2019 - 2020}{2020} = \frac{2018}{2020} = \beta < 1$. Possiamo allora calcolare facilmente i primi cinque termini della successione b_n:

$$\begin{aligned} b_0 &= \beta, & b_1 &= \frac{\beta^2}{2}, & b_2 &= \frac{\beta^4}{2^3}, \\ b_3 &= \frac{\beta^8}{2^7}, & b_4 &= \frac{\beta^{16}}{2^{15}}, & b_5 &= \frac{\beta^{32}}{2^{31}}. \end{aligned}$$

Visto che $\beta < 1$ si ha $\beta^{32} < 1$ mentre ricordando che $2^{10} = 1024 > 10^3$ si ha $2^{31} > (2^{10})^3 = 10^9$ da cui il risultato voluto $b_5 < 10^{-9}$.

$\square$