ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 6 - 5.10.2020

Insieme delle parti

Se A è un insieme anche $\mathcal{P}(A)$ (insieme delle parti) è un insieme definito da questa proprietà

$$x \in \mathcal{P}(A) \iff x \subseteq A$$

Esempio $A = \{0,1\}$ $\qquad \emptyset \subseteq A$

$$2^A = \mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\} \}$$

Esercizio Se A ha n elementi $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi.

$$B = \left\{\begin{array}{ccccc} 0, & \underline{1}, & 2, & \underline{3}, & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \notin & \in & \notin & \in & \notin \end{array}\right\} \qquad C = \{1,3\}$$

per determinare un sottoinsieme devo dire per ogni elemento di B se lo prendo oppure no.

$$f : B \to \{\overset{\in}{\text{prendo}}, \overset{\notin}{\text{non prendo}}\}$$

Notazione:

L'insieme di tutte le funzioni

$$f : A \to B$$

si denota con $\underline{\underline{B^A}}$

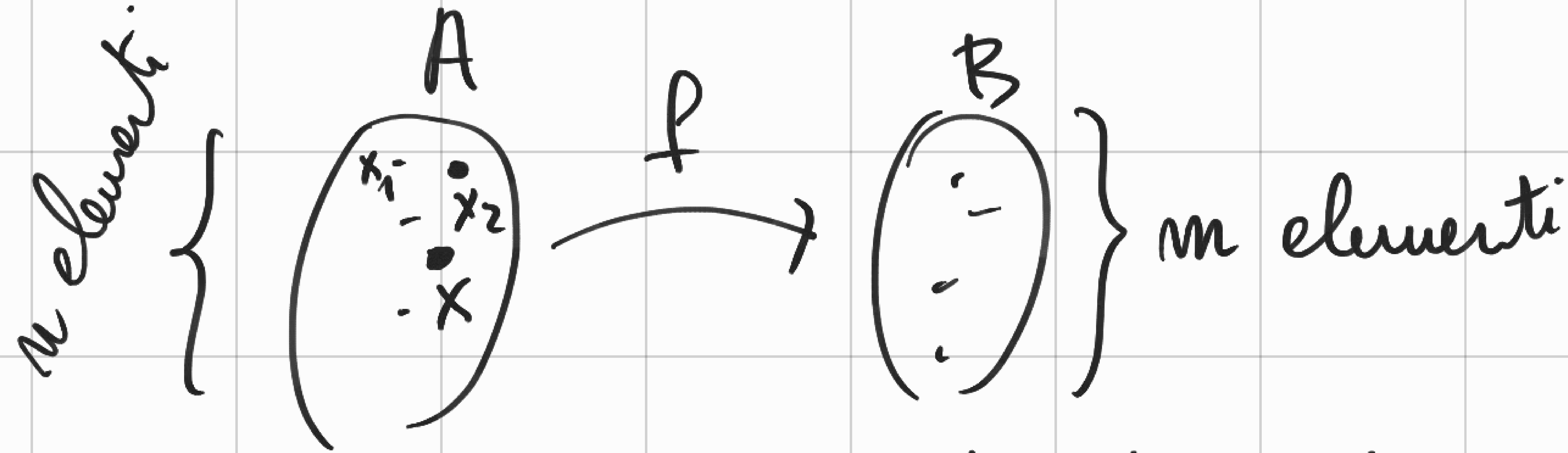
$$\boxed{B^A} = \{f : A \to B\}$$

$$= \{f \in \mathcal{P}(A \times B) : f \ \underline{\text{funzione}}\}$$

Se A ha n elementi

e B ha m elementi

B^A ha m^n elementi



per ogni $x \in A$ devo decidere chi è

$f(x) \in B$:

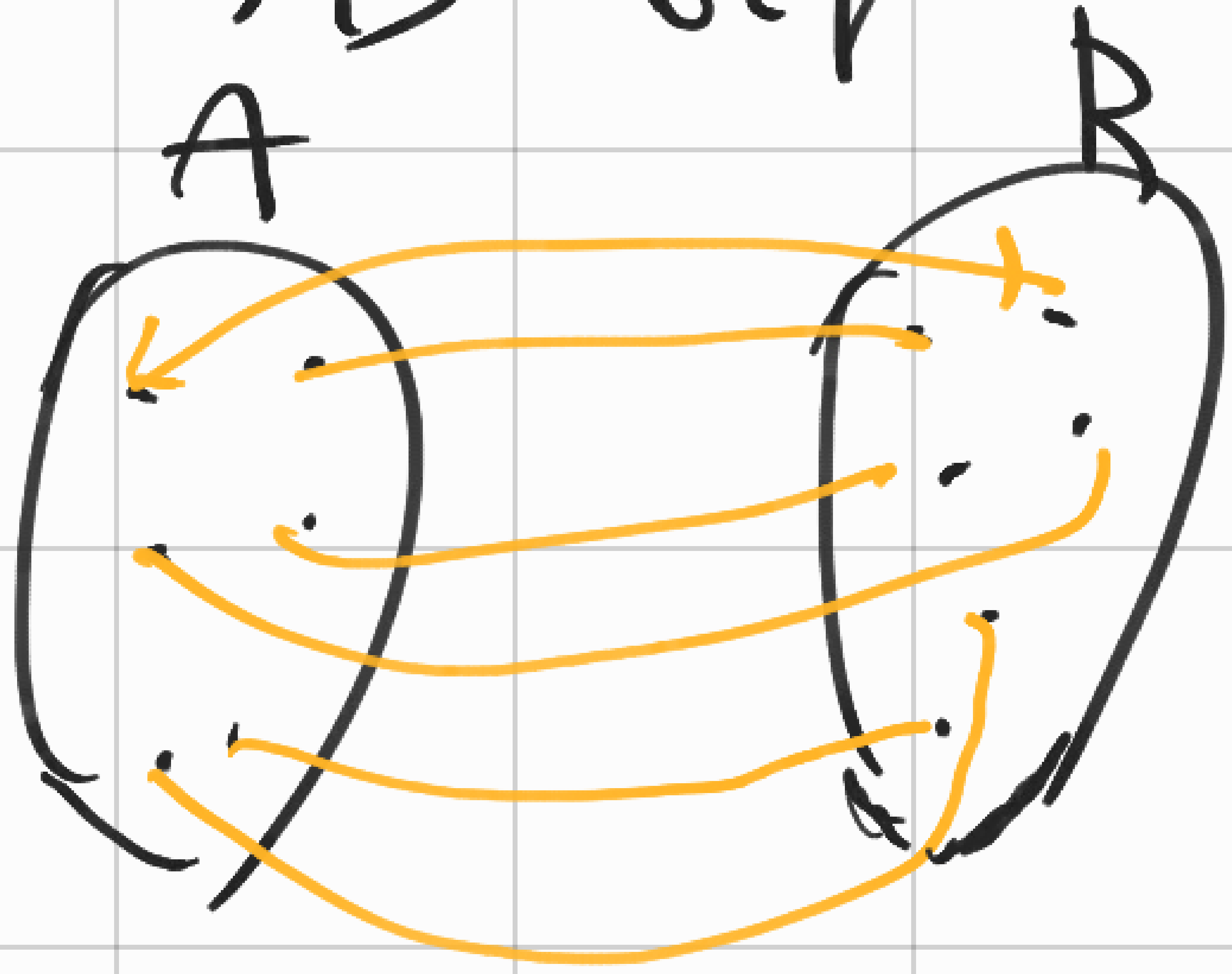
$$n \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & \} \; m \text{ scelte} \\ x_2 & \} \; m \text{ scelte} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n & \} \; m \text{ scelte} \end{array} \right.$$

m^n possibilità.

Cardinalità

A, B insiemi. Se esiste

$f: A \to B$ biiettiva



diremo che A e B sono

equipotenti. Noi scriveremo:

$$\#A = \#B$$

cardinalità di A

Andremo a definire gli insiemi numerici:

li rivedremo più avanti

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}}_{\text{numerabile}} < \underbrace{\#\mathbb{R} = \#\mathbb{C}}_{\text{continuo}}$$

naturali pari

Osservazione

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} 2\mathbb{N}$$
$$n \longmapsto 2n$$

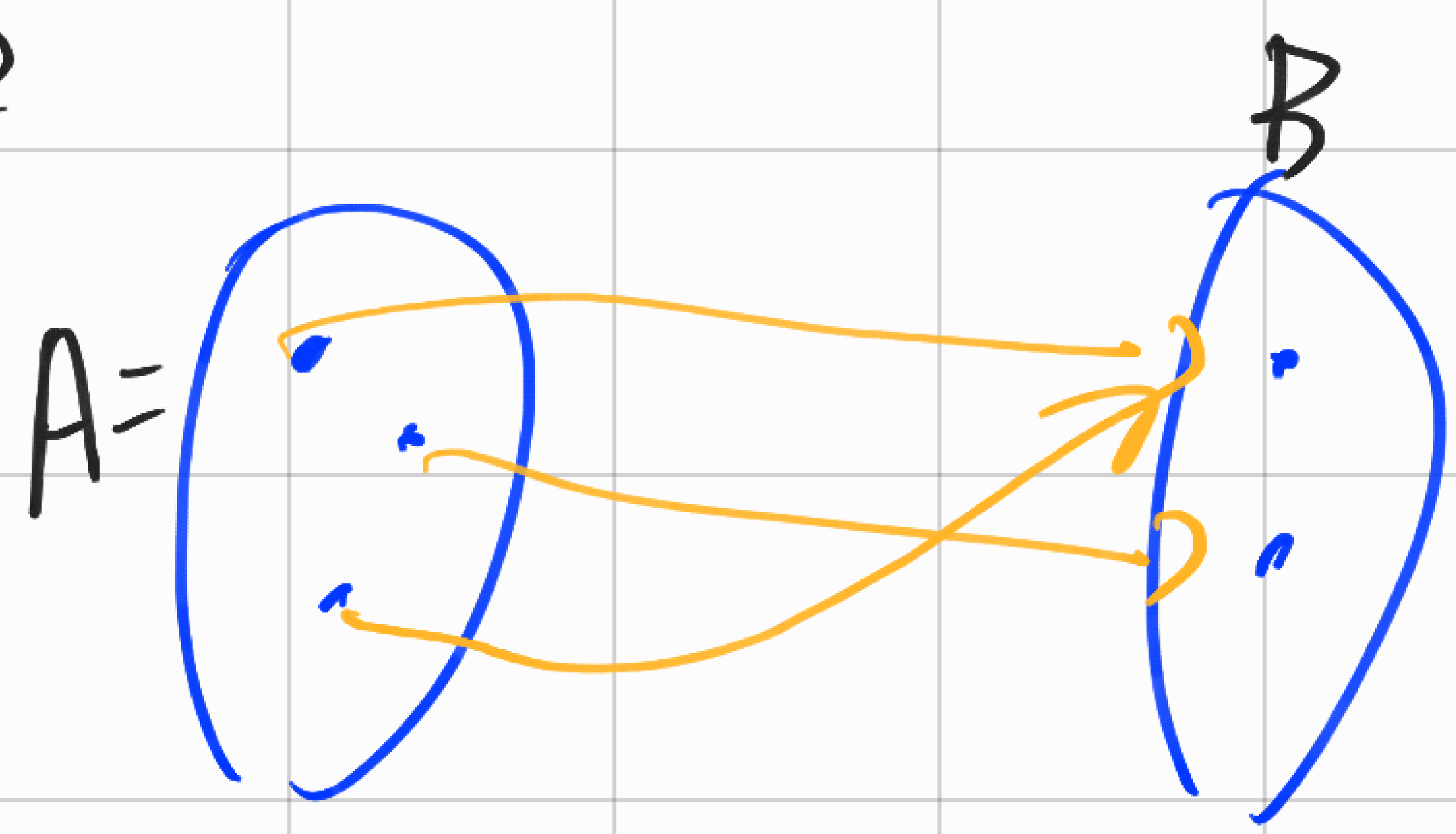
$\#\mathbb{N} = \#2\mathbb{N}$

Galileo

0 1 2 3 4 5

0 2 4 pari

Es



$A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{1,2\}$

$\#A \neq \#B$ $\quad B \subsetneq A$

Def $\#A \leq \#B$ se esiste $f : A \to B$ iniettiva.

$\#A = \#f(A)$ $\quad f(A) \subseteq B$.

Teorema di Cantor

A insieme.

$$\#\mathcal{P}(A) \underset{>}{\neq} \#A \qquad (2^n > n)$$

Esempio $A = \emptyset$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$

dim ① $\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$ ✓

$$f: A \to \mathcal{P}(A)$$
$$x \mapsto \{x\}$$ è iniettiva

② $\#A \neq \#\mathcal{P}(A)$

Per assurdo se $\#A = \#\mathcal{P}(A)$

esisterebbe $f: A \to \underline{\underline{\mathcal{P}(A)}}$

biettiva

$$C = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

$C \subseteq A$ $\quad$ f suriettiva $\Rightarrow \exists\, a \in A$
$f(a) = C$.

$a \in C \iff a \notin f(a) = C$

$a \in C \iff a \notin C$ ASSURDO

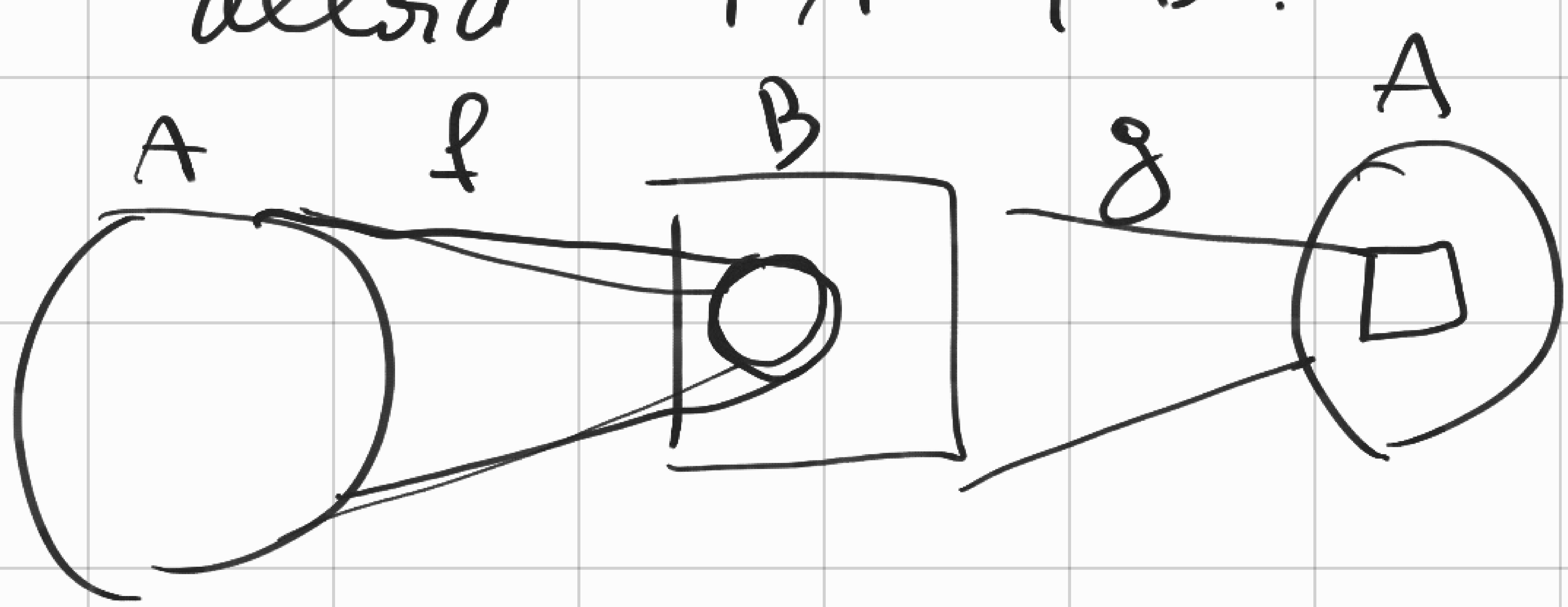
f non può essere surgettiva. $\square$

Cose che non riesco a fare

Teorema di Cantor-Bernstein

$\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$

allora $\#A = \#B$.

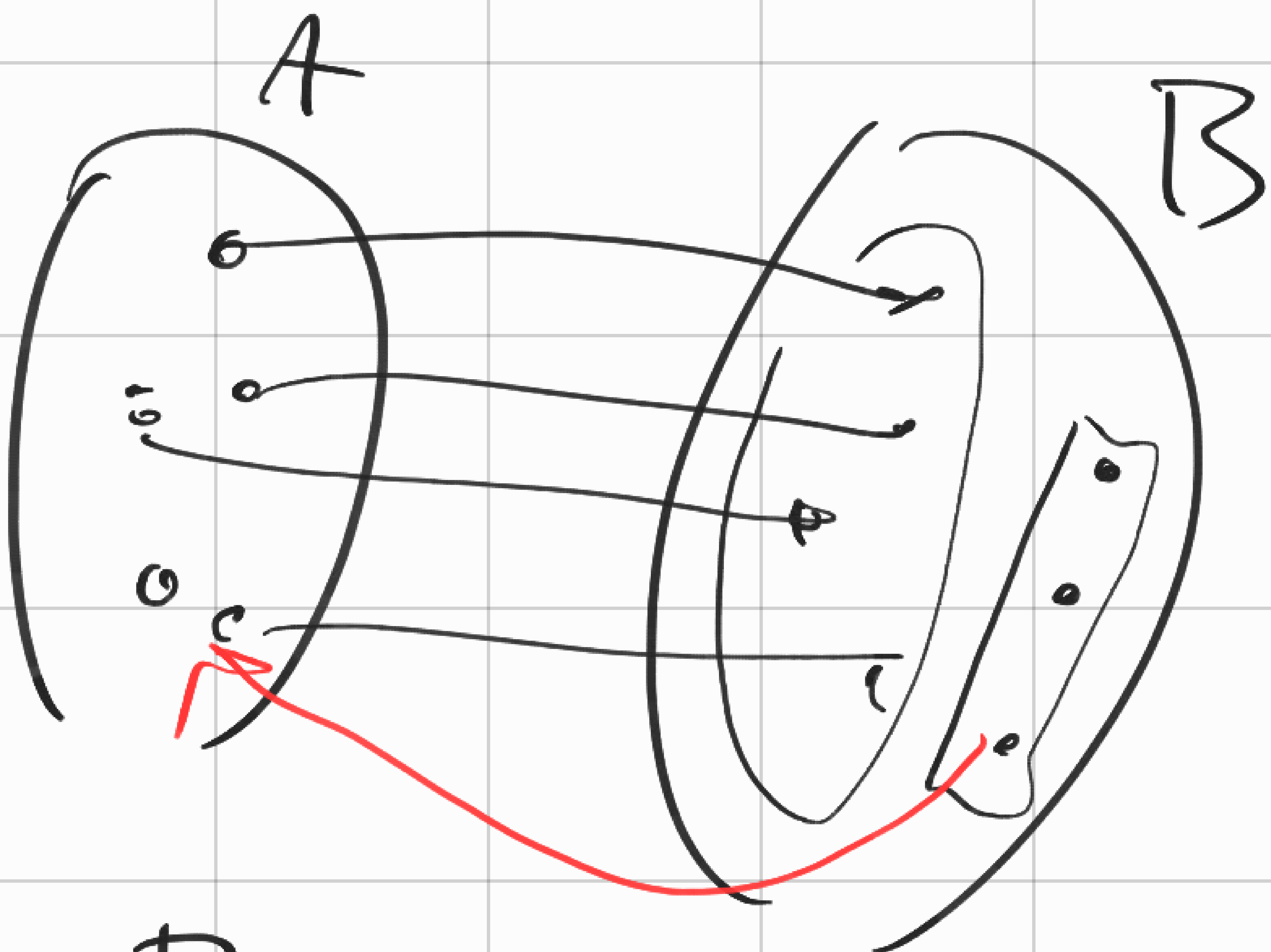


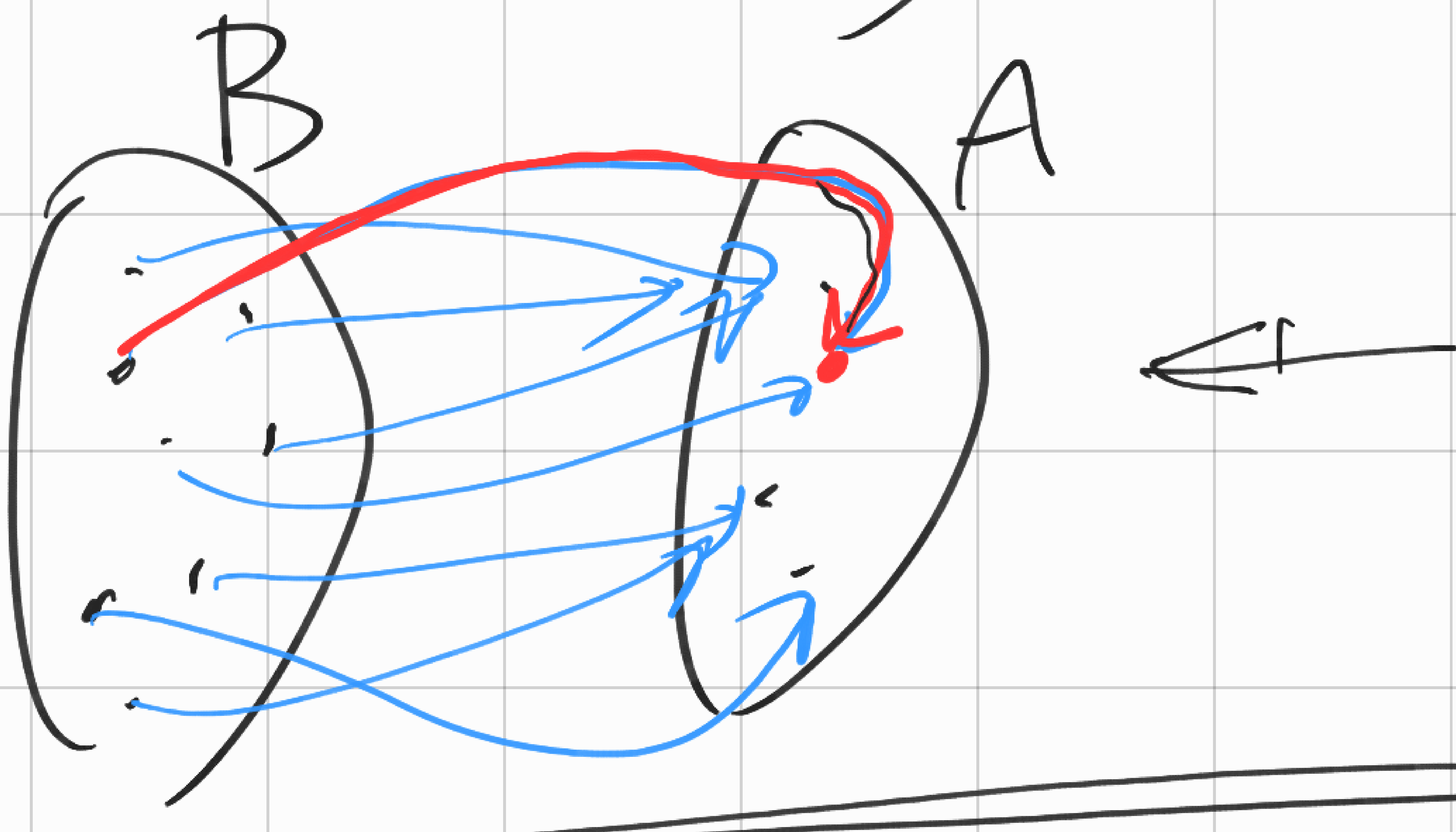
Teorema $\boxed{\#A \leq \#B}$

$\Updownarrow$

$\longrightarrow$ esiste $g : B \to A$ suriettiva.

dim (richiede ulteriore assioma AC)





L'insieme $\mathbb{R}$

Oss1 E' necessario postulare l'esistenza di un insieme infinito.

(Nessuno degli assiomi dati finora permette di costruire un insieme infinito a partire da insiemi finiti).

Assioma di infinito "esiste un insieme infinito".

ad esempio $\mathbb{N}$ ← postulati di Peano

oppure $\mathbb{R}$ ← postulati

Oss 2 Quest'anno partiremo da $\mathbb{R}$

con $+$ e $\leq$

$+$: addizione

$\leq$ ← ordine.

senza moltiplicazione.

Perché?

1) le proprietà della moltiplicazione non sono del tutto ovvie.

2) Costruire la moltiplicazione dall'addizione è la stessa cosa che costruire la potenza dalla moltiplicazione.

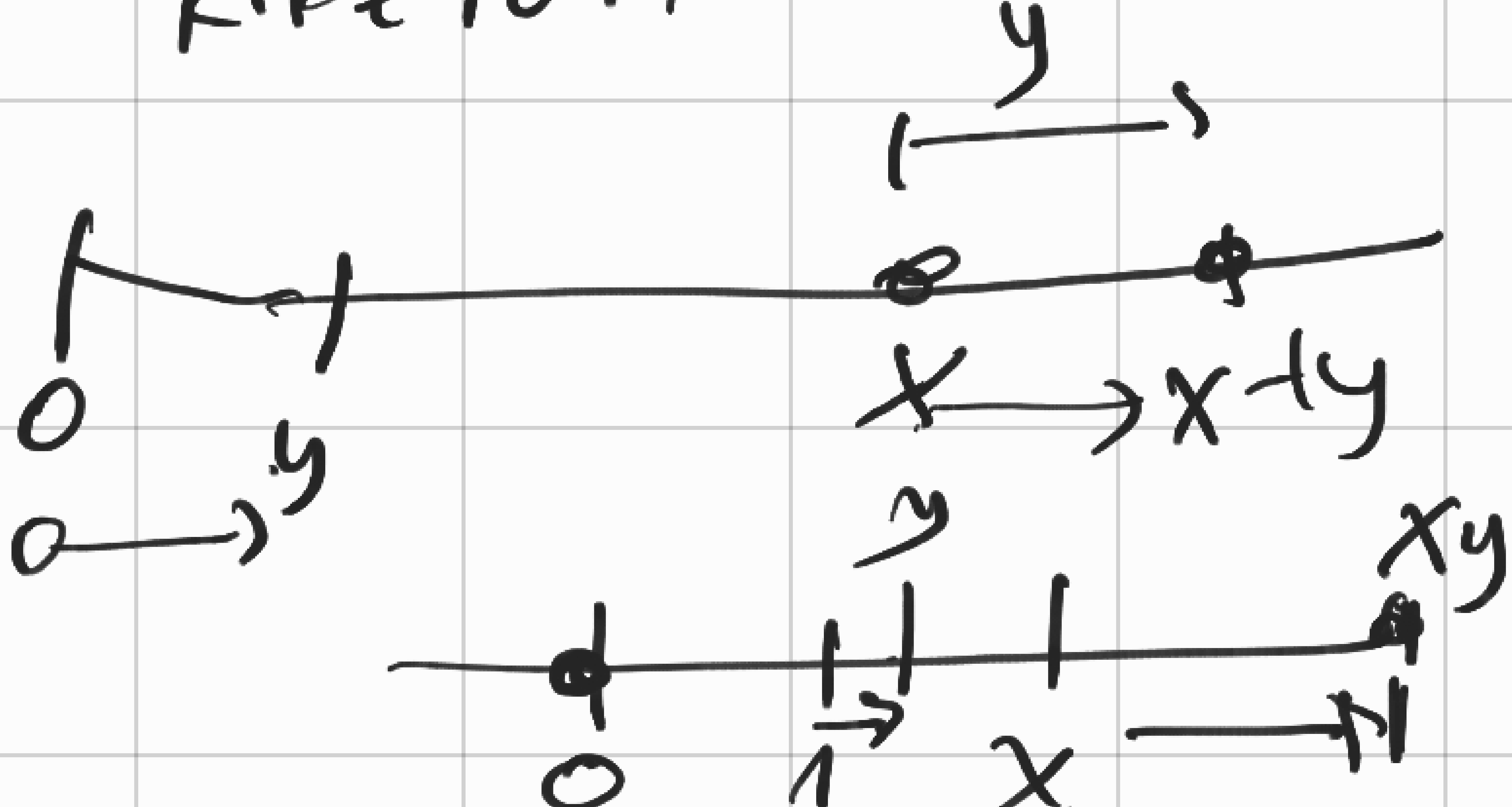
3) DIDATTICA delle OPERAZIONI ELEMENTARI

MOLTIPLICAZIONE E' UNA SOMMA RIPETUTA

LA POTENZA E' UNA MOLTIPLICAZIONE RIPETUTA

- ADDIZIONE,
- MOLTIPLICAZIONE,
- POTENZA

SONO OPERAZIONI INDIPENDENTI



traslazione addizione

riscalamento moltiplicazione

?　　　esponenziale ??

Δ <u>crescita esponenziale</u>