ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 26 – 23.11.2020

RISULTATI TEST SETTIMANALE

<u>Esercizio 6</u> del test settimanale

$A_n = \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \cap [n, 10 \cdot n]$

Calcolare $\liminf\limits_{n \to +\infty} \# A_n$.

$$\{2^k : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, \overbrace{16, 32, 64}, 128, \dots\}$$

$$A_{10} = \{2^k : k \in \mathbb{N},\ 10 \leq 2^k \leq 100\}$$
$$= \{16, 32, 64\}$$

$$A_{16} = \{16, 32, 64, 128\} \qquad 16 \leq 2^k \leq 160$$

$$A_{2^n} = \{2^n, 2 \cdot 2^n, 4 \cdot 2^n, 8 \cdot 2^n\} \qquad 16 \cdot 2^n > 10 \cdot 2^n$$

$\limsup \# A_n = 4$

$$A_{\underbrace{2^n+1}} = \{2 \cdot 2^n, 4 \cdot 2^n, 8 \cdot 2^n\} \qquad 16 \cdot 2^n > 10 \cdot (2^n+1)$$

se n grande

frequentemente $\#A_n = 3$

$\#A_n \geq 3 \quad \forall n.$

Esercizio 7)

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 1 & \text{se } a_n < 10 \\ a_n - 10 & \text{se } a_n \geq 10 \end{cases} \end{cases} \qquad 0 \leq a_n \leq 82$$

quanti elementi ha l'insieme dei punti limite?

$a_0 = 3$, $a_1 = 10$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 5$

$a_6 = 26$, $a_7 = 16$, $a_8 = 6$, $a_9 = 37$, $a_{10} = 27$

$a_{11} = 17$, $a_{12} = 7$, $a_{13} = 50$, $a_{14} = 40$, $a_{15} = 30$

$a_{16} = 20$, $a_{17} = 10 = a_1$, ... $a_{n+16} = a_n$

16 valori frequenti.

SERIE NUMERICHE

Se a_n è una successione, considero la successione

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{(n+1 addendi)}$$

S_n è a sua volta una successione (S_n = somme parziali)

S_n si chiama serie di termine generico a_n

Il limite (se esiste) di S_n si chiama somma della serie e si indica:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n .$$

Esempio $\quad a_k = k^2$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

$$= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

$$a_n \rightsquigarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

carattere di una serie: convergente / divergente / indeterminata

<u>Esempio</u> (la serie geometrica)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad q \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

ragione

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$S_n \cdot (1-q) = (1 + q + q^2 \dots + q^n)(1-q)$$

$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \dots \cancel{\dots} - q^{n+1}$$

$$= 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Se $|q| < 1$ la serie è convergente:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}}$$

Se $q \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = +\infty$

Se $q = -1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = ?$$

$S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3 \qquad 1$

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 \dots + (-1)^n$$

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

S_n è indeterminata.

$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ è indeterminata.

Se $q < -1$ es: $q = -2$ $\quad q^k = (-1)^k \cdot 2^k$

$1 - 2 + 4 - 8 + 16 \dots \qquad q = -|q|$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - (-1)^{n+1} |q|^{n+1}}{1 + |q|}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot |q|^{n+1} \left(-\frac{1}{(-1)^{n+1} |q|^{n+1}} + 1 \right)}{1 + |q|}$$

$\xrightarrow{} 0$

$|S_n| \to +\infty \qquad S_{2n} \longrightarrow +\infty$

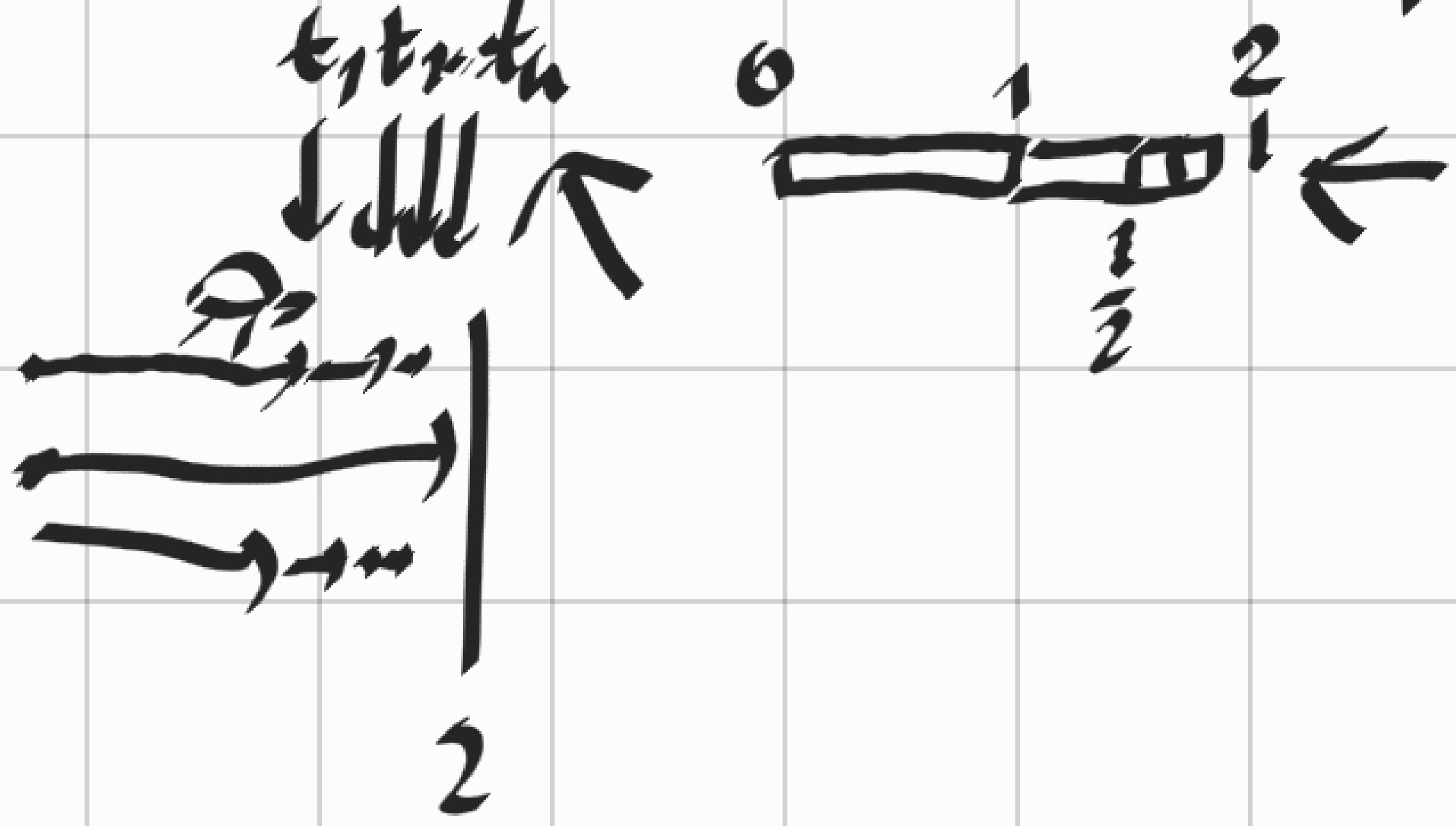
$\qquad\qquad\qquad S_{2n+1} \longrightarrow -\infty$

la serie è indeterminata.

Quanto fa $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = ?$ $\quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = ?$

noi troveremo il carattere.

Geometrica: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$



Data una successione S_n qualunque

posso trovare a_n tale che

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \dots = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n$$

$$a_n = \underbrace{S_n - S_{n-1}}$$ & $a_n \geq 0$

& S_n crescente.

Teorema (condizione necessaria)

Se $\sum_{k=0}^{n} a_k$ è convergente

cioè $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ esiste ed è finita (spesso si dirà $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ convergente)

Allora $a_n \to 0$.

Dim $a_n = S_n - S_{n-1} \to l - l = 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = l \in \mathbb{R}$$ $\square$

La condizione è anche sufficiente?

Vedremo che, no, non è sufficiente:

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ serie armonica.

$a_n = \frac{1}{n}$

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$= +\infty$ ∇ LO VEDREMO.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ invece è convergente.}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Teorema (serie a termini positivi)

Se $a_n \geq 0$ la serie $\sum_{k=0}^{n} a_k$

non è indeterminata.

Anzi è convergente oppure divergente a $+\infty$.

dim $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n + 0$
$= S_n$

S_n è crescente

$\Rightarrow \lim S_n = \sup S_n$ esiste!

$(S_n \geq 0)$. $S_0 = a_0 \geq 0$ $\square$

Oss

$$S_n = \sum_{k=m}^{n+s} a_k \quad e \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = R_n$$

hanno lo stesso carattere

$\boxed{s, m \text{ fissati}}$

$$S_n = R_{n+s} - a_0 - a_1 - \dots - a_{m-1}$$

$$= R_{n+s} - C$$

S_n e R_{n+s} hanno lo stesso carattere

ma R_n e R_{n+s} hanno lo stesso carattere (e lo stesso limite)

$\Rightarrow$ S_n e R_n hanno lo stesso carattere.

(ma forse limite diverso)

Scriveremo più semplicemente

$\sum a_n$ per indicare

una qualunque serie del tipo

$$\sum_{k=m}^{n-s} a_k.$$

<u>Esempio</u> $|q|<1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q+q^2+q^3+\dots\dots+q^n$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - q^0 \longrightarrow \frac{1}{1-q} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \quad \| ?$$

$$= q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k \longrightarrow q \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$\frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1-(1-q)}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

Serie convergenti sono uno spazio vettoriale e la somma è una applicazione lineare.

Teorema (linearità della somma)

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono convergenti e se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

allora $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$ è convergente e vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$$

dim

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_n + \mu b_n)} = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_n + \mu \cdot \sum_{k=0}^{n} b_n$$

$n \to +\infty$

$$\lambda \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_n + \mu \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} b_n \qquad \square$$

Esercizio

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \cdot (q+1) \qquad |q| < 1$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (q^{k+1} + q^k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

Se $|q|<1$ sono convergenti

$$= \frac{q}{1-q} + \frac{1}{1-q} = \frac{q+1}{1-q}$$

<u>Esempio</u>

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{3^k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

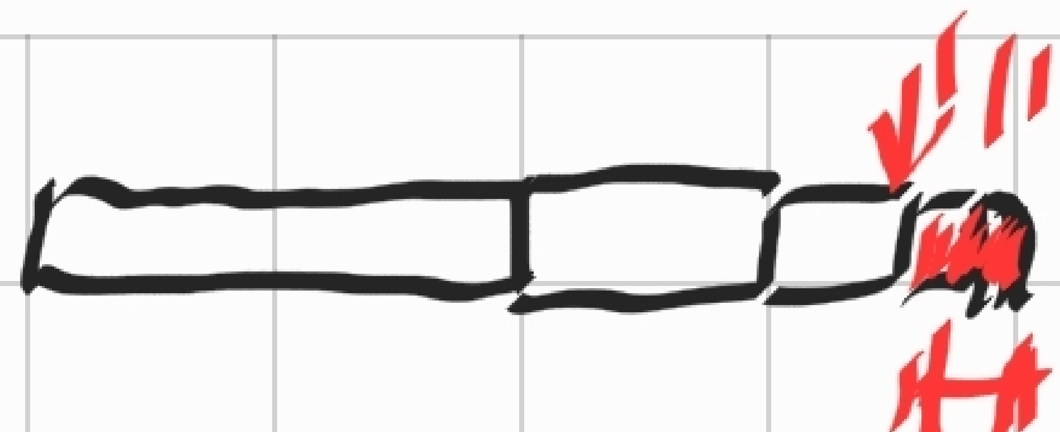
$$= 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

$\square$

<u>Teorema</u> Se $\sum a_n$ è convergente

coda

allora $\lim_{n\to+\infty} \boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k} = 0$.



<u>dim</u>

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m} a_k$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(S_m - S_n\right)$$

$$\left(S_m=\sum_{k=0}^{m} a_k \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \right)$$

Se S_m è convergente

$$S_m \to S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(S - S_n\right) = S - S$$

$$= 0$$