ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 38 - 11.1.2021

Serie di potenze

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k \qquad a_k \in \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

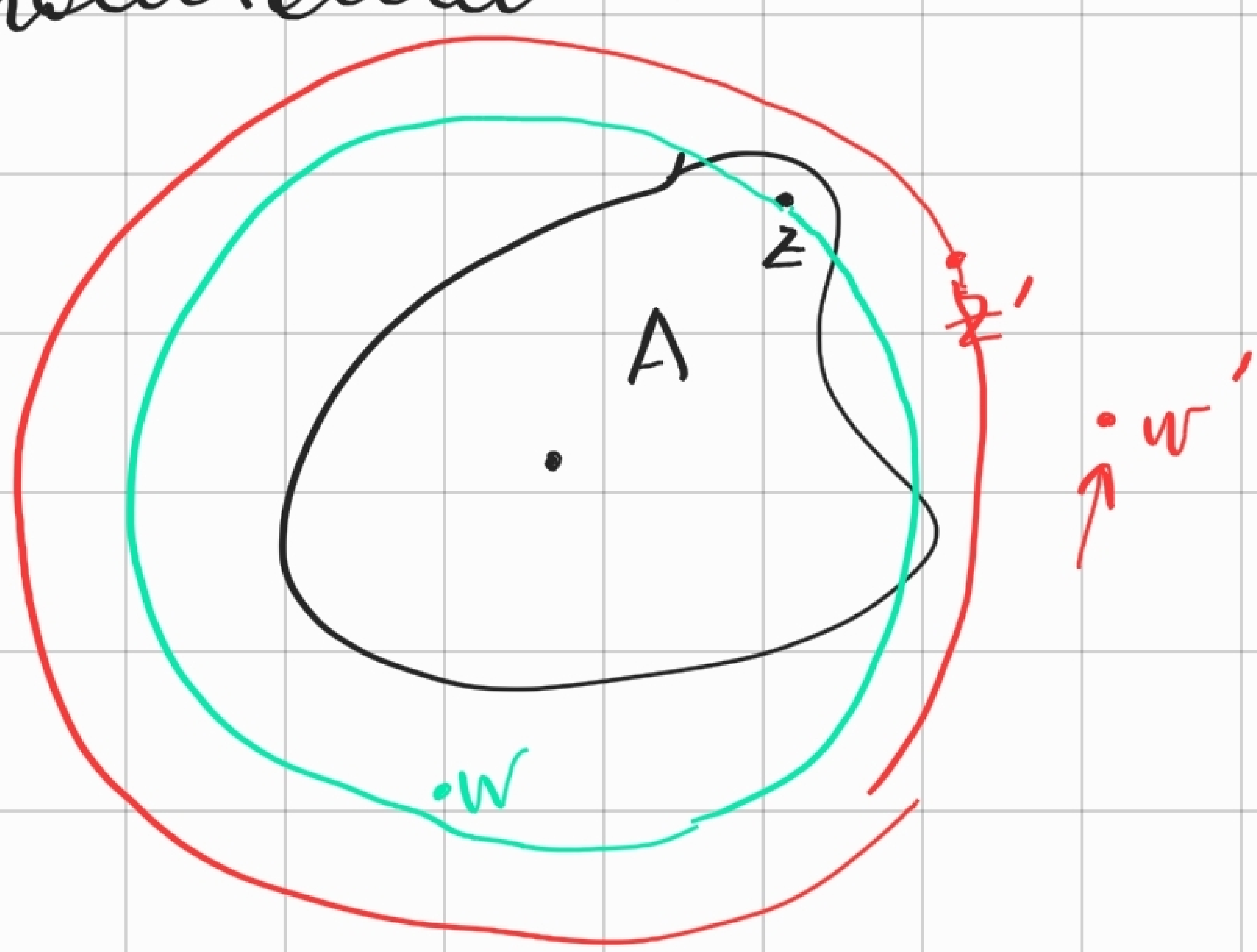
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \text{ converge} \right\}$$

Lemma Se per un certo $z \in \mathbb{C}$ esiste $L > 0$ tale che $\forall k \quad |a_k z^k| \leq L$

Allora $\forall w \in \mathbb{C}$ con $|w| < |z|$ si ha

$$\sum a_k w^k$$

converge assolutamente.



Teorema (raggio di convergenza). Se $\sum a_k z^k$ è una serie di potenze esiste $R \in [0, +\infty]$ tale che l'insieme A di convergenza soddisfa:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \subseteq A \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}.$$

R si chiama Raggio di convergenza.

Inoltre se $|z| < R$ la serie converge assolutamente.

Equivalentemente:

$$R = \sup\left\{|z| : z \text{ tale che } \sum a_k z^k \text{ converge} \right\}$$
(assolutamente)

$$\inf\left\{|z| : \text{la serie non converge}\right\}$$

Esempio $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2-k}$

Convergenza assoluta: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k^2-k}$

criterio del rapporto: $\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)^2-(k+1)} \Big/ \frac{|z|^k}{k^2-k}$

$$= |z| \cdot \frac{k^2-k}{(k+1)^2-(k+1)} \to |z| \cdot 1$$

se $|z|<1$ la serie converge assolutamente

se $|z|>1$ la serie non converge ($a_k|z|^k \to +\infty$)

$\Rightarrow R=1$.

In generale per $\sum a_k z^k$ applicando il criterio del rapporto alla serie dei moduli si ottiene:

$$\frac{|a_{k+1} z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \frac{|z|^{k+1}}{|z|^k} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \cdot |z| \to l \cdot |z|$$

Se $\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = l$ allora $R = \frac{1}{l}$ (*)

in quanto se $|z|<\frac{1}{l}$ $\quad l|z|<1$.

(*) $\frac{1}{+\infty}=0$ $\quad$ se $l=0$ $R=+\infty$.

Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|$$

Posto $l = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = l \cdot |z| < 1$$

Posto $R = \frac{1}{l}$ la serie converge assolutamente se $|z| < R$

Possibile definizione alternativa del raggio di convergenza:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Esempio $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k! \cdot z^k$ $\qquad a_k = k!$

rapporto $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \dfrac{(k+1)!}{k!} = k+1 \to +\infty = \ell$

$R = 0 \qquad A = \{0\}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! \cdot z^k = z^0 + z^1 + 2 \cdot z^2 + 6 \cdot z^3 + \dots$$
$$= 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \dots$$

anche radice $\sqrt[k]{k!} \to +\infty \qquad R = 0$.

Teorema Sia
$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se R è il raggio di convergenza della serie, se $|z| < R$ la funzione f è continua nel punto z.

Lemma (stabilità del raggio di convergenza)
Se $\sum a_k z^k$ ha raggio di convergenza R anche la serie $\sum \underline{k} \cdot a_k \cdot z^k$ ha raggio di

convergenza $R' = R$

dim da un lato $\quad |a_k z^k| \le |k\, a_k z^k|$ $(*)$

quindi $\quad R' \ge R$.

dall'altro lato: $\quad$ siccome $\sqrt[k]{k} \to 1$

$$\sqrt[k]{|k\, a_k|} = \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$\underline{\limsup} \sqrt[k]{|k\, a_k|} = \underline{\limsup} \sqrt[k]{|a_k|} .$$

dimostrazione alternativa

Mostriamo che se $\sum a_k z^k$ converge assolut.

se $|w| < |z|$ allora $\sum k\, a_k w^k$ converge (assolut.)

$$|k\, a_k w^k| = k \cdot |a_k| |w|^k$$

$$= k\, |a_k| |z|^k \left(\frac{|w|}{|z|}\right)^k$$

$$= \underbrace{k \cdot q^k} \; |a_k|\, |z|^k$$

$$\ll |a_k|\, |z|^k$$

$q = \dfrac{|w|}{|z|} < 1$

$q^k \ll \dfrac{1}{k}$

$k \cdot q^k \longrightarrow 0$

Se $\sum |a_k z^k|$ converge anche

$\sum |a_k w^k|$ converge. $\square$

<u>dim</u> (continuità di f)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

f è continua nel punto z se

$\forall w \in A$:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall |z-w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$

(oppure: $\lim_{w \to z} f(w) = f(z)$)

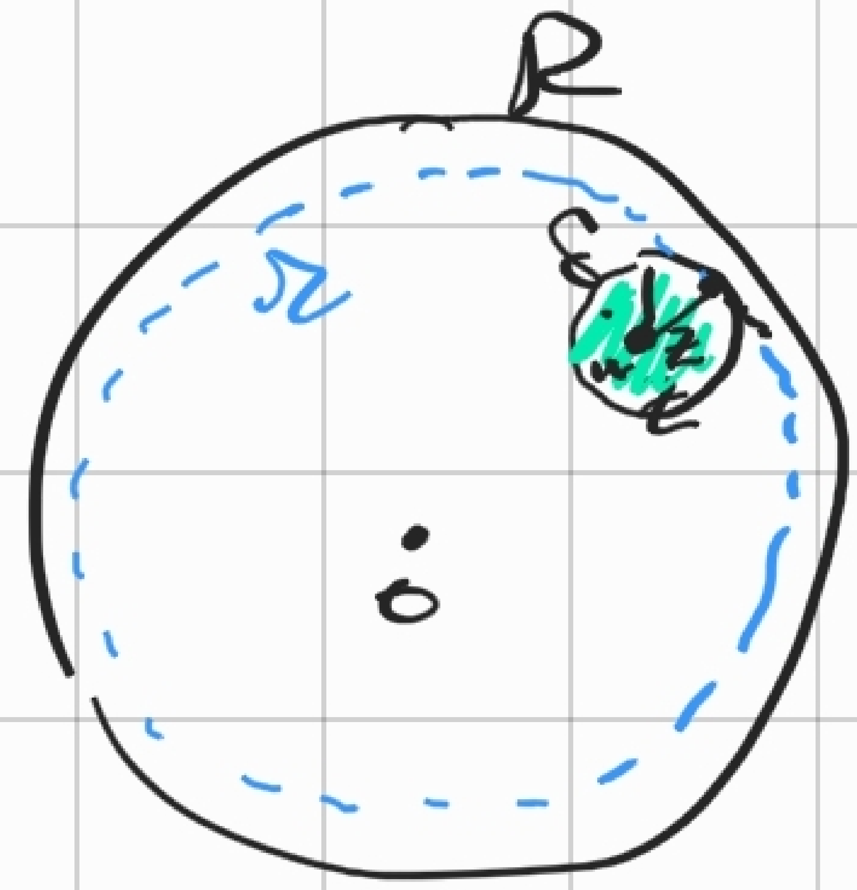
$$|f(z) - f(w)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k w^k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \underbrace{\left(z^k - w^k\right)} \right|$$

$$z^k - w^k = (z-w)\cdot\left(z^{k-1} + z^{k-2}w + \overbrace{\dots}^{z^{k-j}w^{j-1}} + zw^{k-2} + w^{k-1}\right)$$

$$|z^k - w^k| \leq |z-w| \cdot \left(|z|^{k-1} + |z|^{k-2}|w| + \dots + |z||w|^{k-2} + |w|^{k-1}\right)$$

Scegliamo $\delta > 0$ tale che



$|z| < R$

$|z| < r < R$

$\delta < r - |z|$

$$|z| + \delta = r < R$$

se $|w - z| < \delta$

$$|w| \le |z| + \delta \le r \qquad |z| \le r$$

$$|z^{k-j} w^{j-1}| \le r^{k-j} r^{j-1} = r^{k-1}$$

$$|z^k - w^k| \le |z - w| \, (\underbrace{r^{k-1} + r^{k-1} + \dots + r^{k-1}}_{k})$$

$$\underbrace{|z^k - w^k| \le k \cdot r^{k-1} \cdot \delta}$$

$$|f(z) - f(w)| \le \Big|\sum \underbrace{a_k (z^k - w^k)}\Big| \quad (**)$$

$$|a_k \cdot (z^k - w^k)| \le |a_k| \cdot k \cdot r^{k-1} \cdot \delta$$

(*) $\sum k \cdot a_k r^k$ ha raggio

di convergenza R come $\sum a_k z^k$.

visto che $r < R$ la serie modificata (*) converge assolutamente.

(**) $\left| \sum a_k \cdot (z^k - w^k) \right| \leq \sum \delta |a_k| \cdot k \cdot r^{k-1}$

$= \delta \sum k |a_k| r^{k-1} = \delta \cdot S$

$\delta \cdot S < \varepsilon$ se $\delta < \frac{\varepsilon}{S}$ $\square$

Esponenziale complesso

$$e^z = \exp(z) = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}} \qquad R = +\infty$$

la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è continua.

ed ha le seguenti proprietà:

(1) $\exp(0) = 1$

$$\exp(z) = \underset{k=0}{1} + \underset{k=1}{z} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\exp(0) = 1$$

(2) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}$$

$z \to z_0$

$\bar{z} \to \bar{z}_0$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\exp(\bar{z}) \qquad \overline{\exp(z)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(3) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

$$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} z^k w^{n-k}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$

?

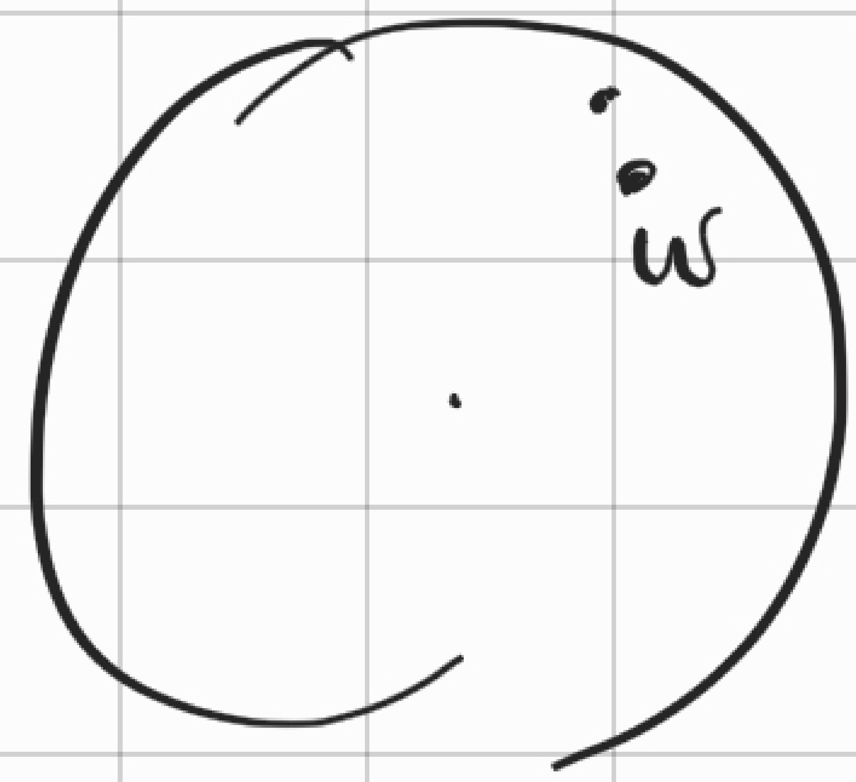
$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^j}{j!}$$

$\sum \frac{z^k}{k}$ ✓ ← converge per $z = -1$

$a_k = \frac{1}{k}$

$\downarrow k \cdot a_k$

$\sum z^k$ ← non converge per $z = -1$.



$\sum |a_k z^k| \to \sum |k\, a_k w^k|$

$|w\,k\,|z||$