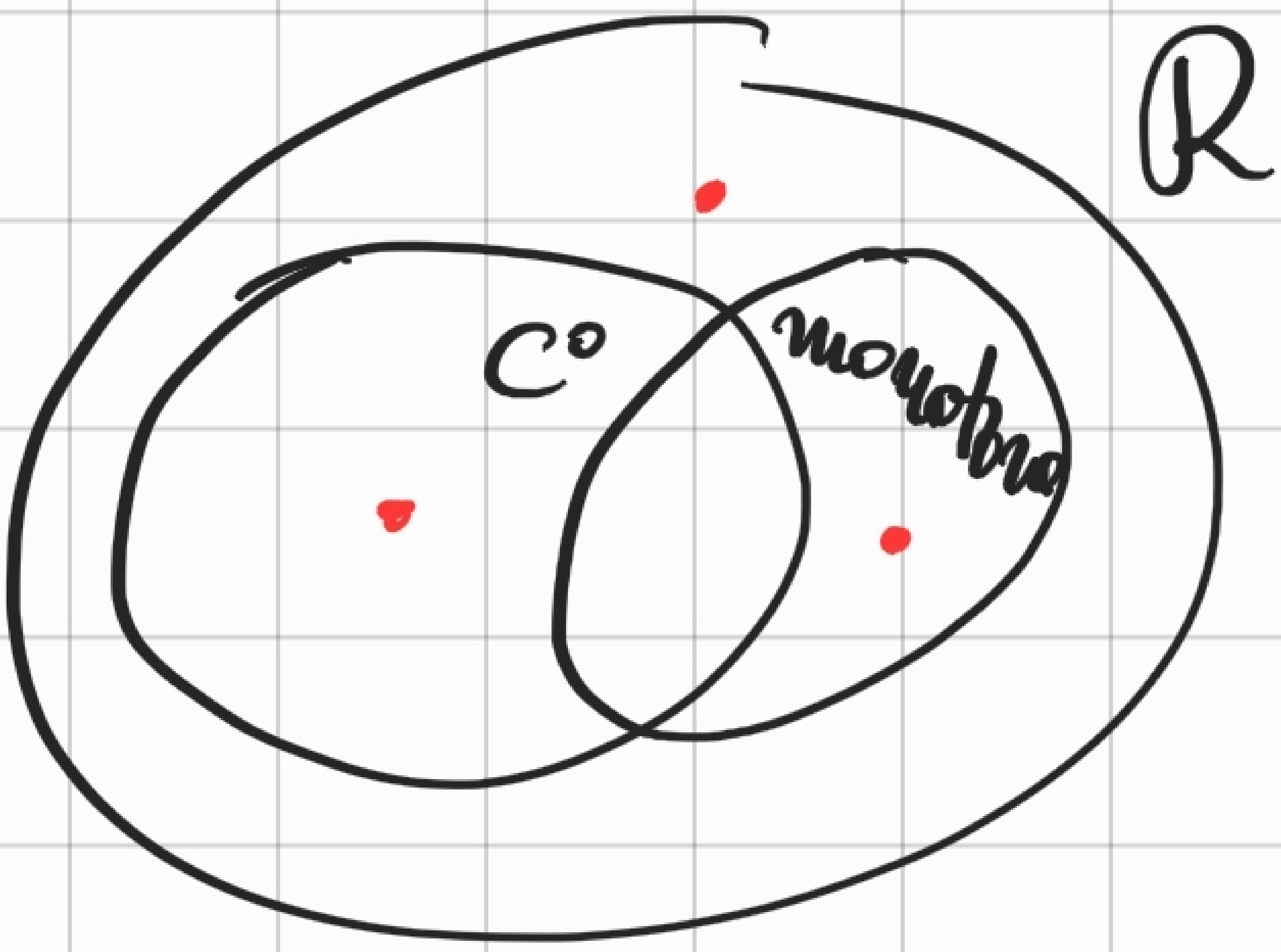
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 60 — 3.3.2021

<u>Teorema</u> se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua allora f è R-integrabile

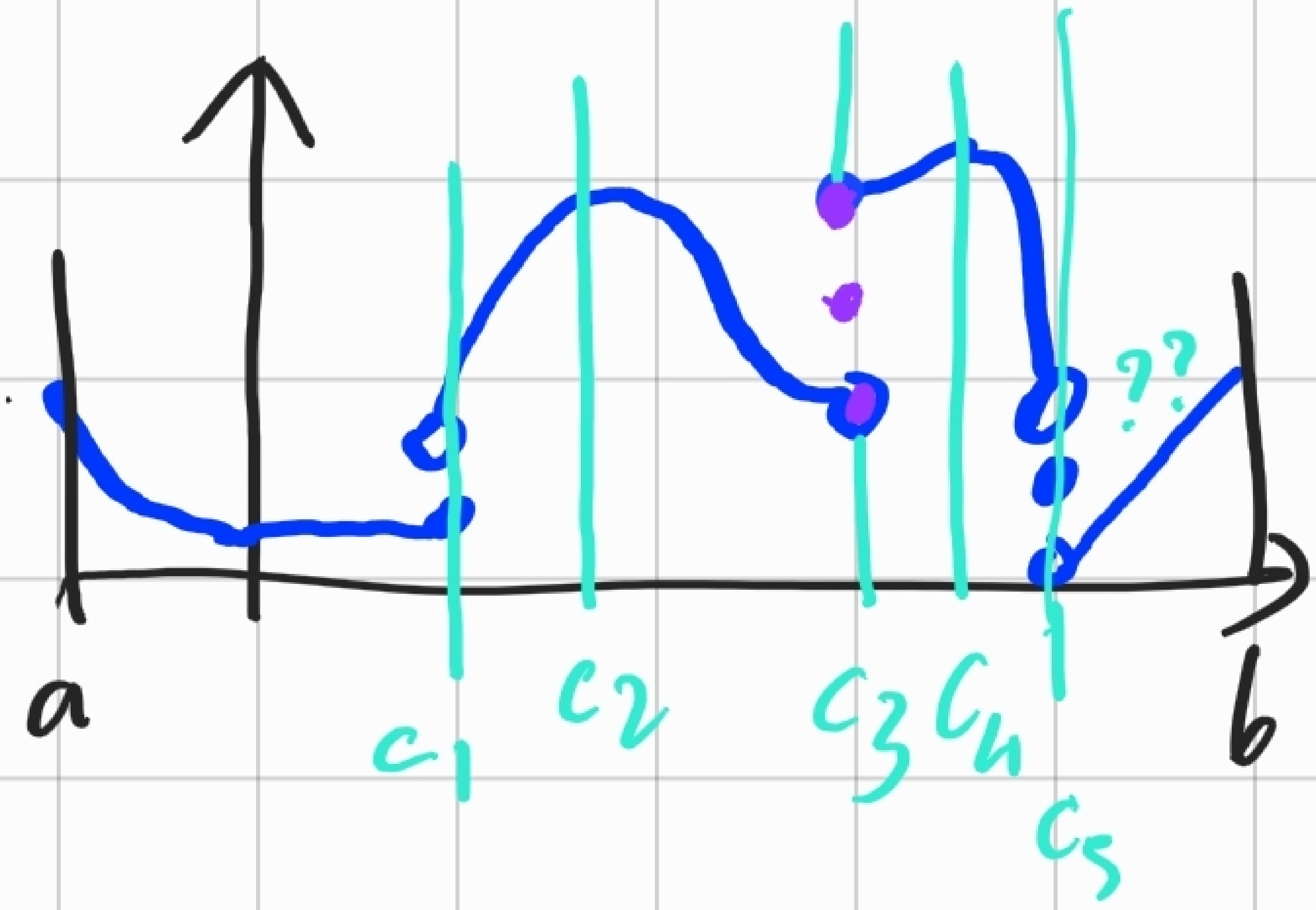
<u>Teorema</u> se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è monotona allora f è R-integrabile.

$$\mathcal{R}([a,b]) = \{ f:[a,b]\to\mathbb{R},\ \text{limitate},\ R\text{-integrabili} \}$$



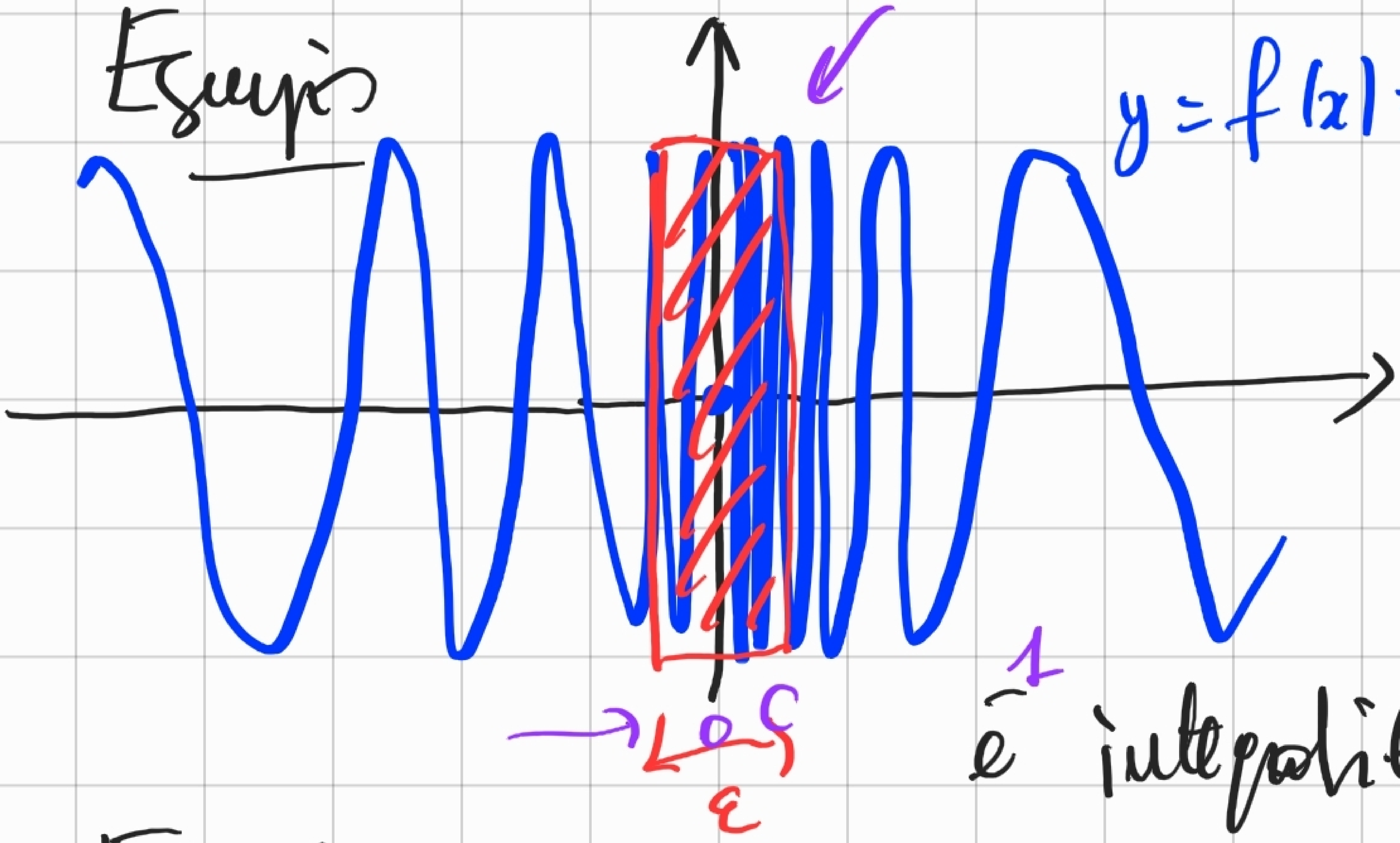
Additività: Se f integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$ $\Leftrightarrow$ f integrabile su $[a,b]$.

Esempio



è integrabile?

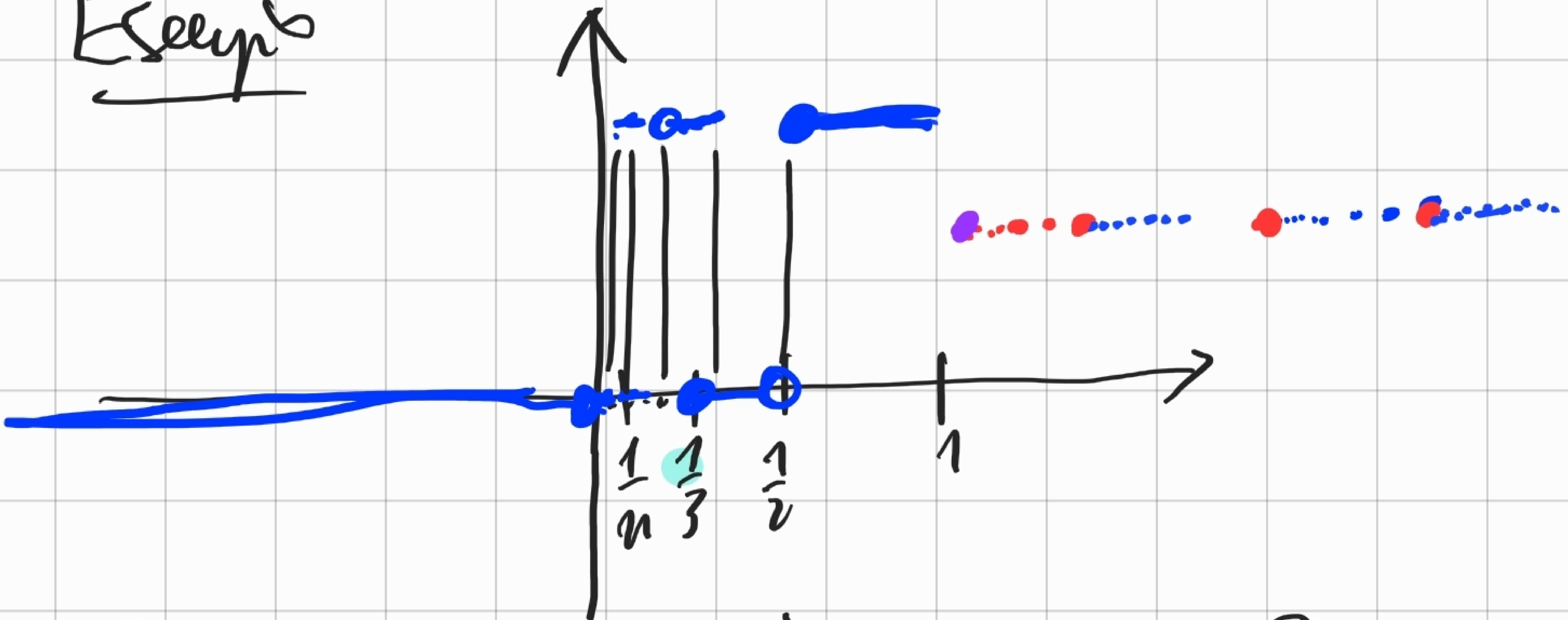
Esempio



$$y = f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è integrabile? <u>Sì</u>

Esempio



f non è continua in ∞ <u>punti</u>?

Esempio (già visto)

Dirichlet $\rightarrow$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

non è integrabile

Teorema (continuità) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f limitata, tale che $\forall c\in(a,b]$ f ristretta sia R-integrabile su $[c,b]$.
Allora f è R-integrabile su tutto $[a,b]$ e vale:

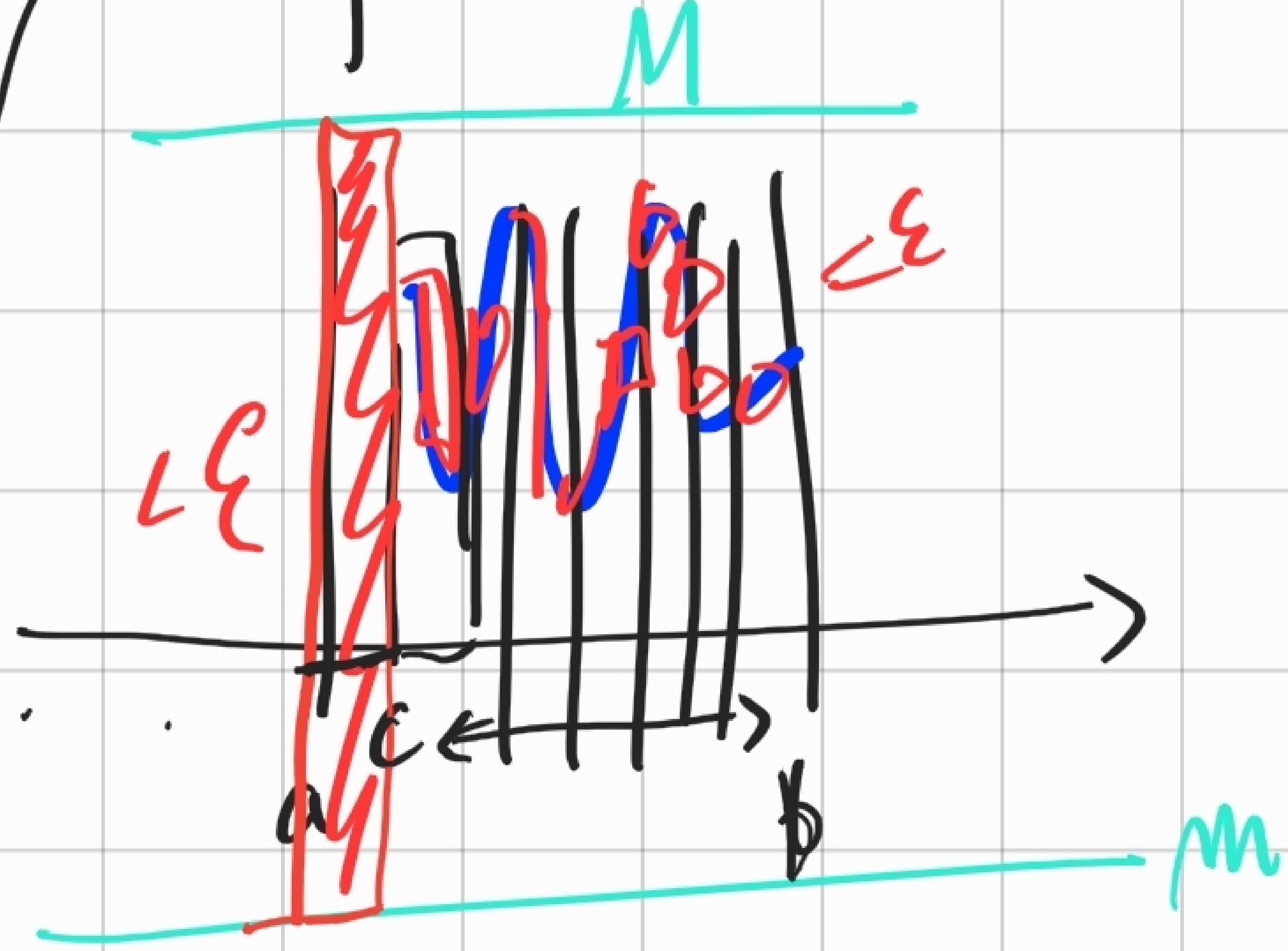
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c\to a^+\\ c>a}} \int_c^b f(x)\,dx.}$$

1. il valore $f(a)$ è ininfluente.
2. La funzione integrale:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{è continua.}$$

dim

$m \le f(x) \le M$.



Scelgo c in modo che $(c-a)\cdot(M-m) < \frac{\varepsilon}{2}$

prendo P suddivisione di $[c,b]$ tale che

$$S^*(f,P) - S_*(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$Q = P \cup \{a\}$ è suddivisione di $[a,b]$

$$S^*(f,Q) - S_*(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

... $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in (a,b]$

$$\left| \int_c^b f - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{c \to a^+} \int_c^b f = \int_a^b f. \qquad \square$$

---

f limitata

$\exists M : \quad |f(x)| \leq M$

$\exists M, m : \quad m \leq f(x) \leq M$

$$\begin{cases} \sup f(x) < +\infty \\ \inf f(x) > -\infty \end{cases}$$

$\sup |f(x)| < +\infty$

Teorema fondamentale del calcolo integrale (Torricelli - Barrow)

(1) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su I, intervallo. Fissato $x_0 \in I$ è ben definito, $\forall x \in I$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

$[x, x_0]$

[f è continua su $[x_0, x] \subseteq I$ $\Rightarrow$ è R-integrabile]

(funzione integrale).

Allora $F : I \to \mathbb{R}$ è derivabile e

$$F'(x) = f(x).$$

(2) [formula fondamentale del calcolo integrale].

Se $G : I \to \mathbb{R}$ è tale che

$$G'(x) = f(x)$$

allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

Notazione $\left[G(x) \right]_a^b = G(b) - G(a)$.

$G(x)\Big|_a^b$ //

<u>Esempio</u> Voglio calcolare

$$\int_a^b x^2 \, dx$$

$f(x) = x^2$ è continua.

Chi è $G(x)$ tale che $G'(x) = x^2$?

$$\left[\begin{array}{l} D\, x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1} \\ D\, x^3 = 3x^2 \\ D\, \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{3x^2}{3} = x^2 \end{array} \right.$$

$G(x) = \dfrac{x^3}{3}$ $\quad G'(x) = x^2$ $\qquad G(b) - G(a)$

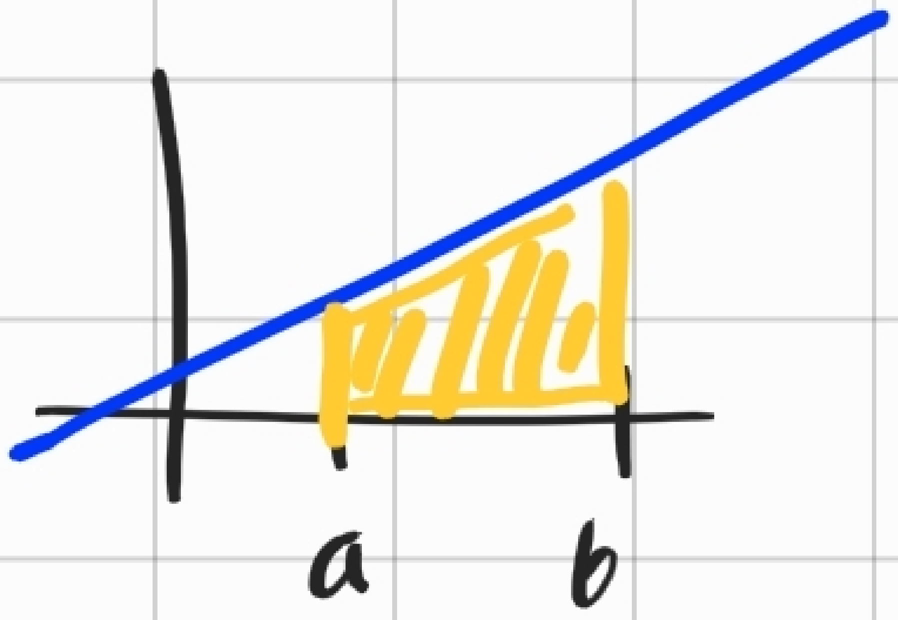
$$\int_a^b x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^b [mx+q]\,dx = \left[\frac{m x^2}{2} + qx\right]_a^b$$

$$= \frac{m b^2}{2} + q\cdot b - \left(\frac{m a^2}{2} + q\cdot a\right)$$

$$= \frac{1}{2} m (b^2 - a^2) + q(b-a)$$

$$= \frac{1}{2} (b-a) \left[m a + m b + 2q \right]$$



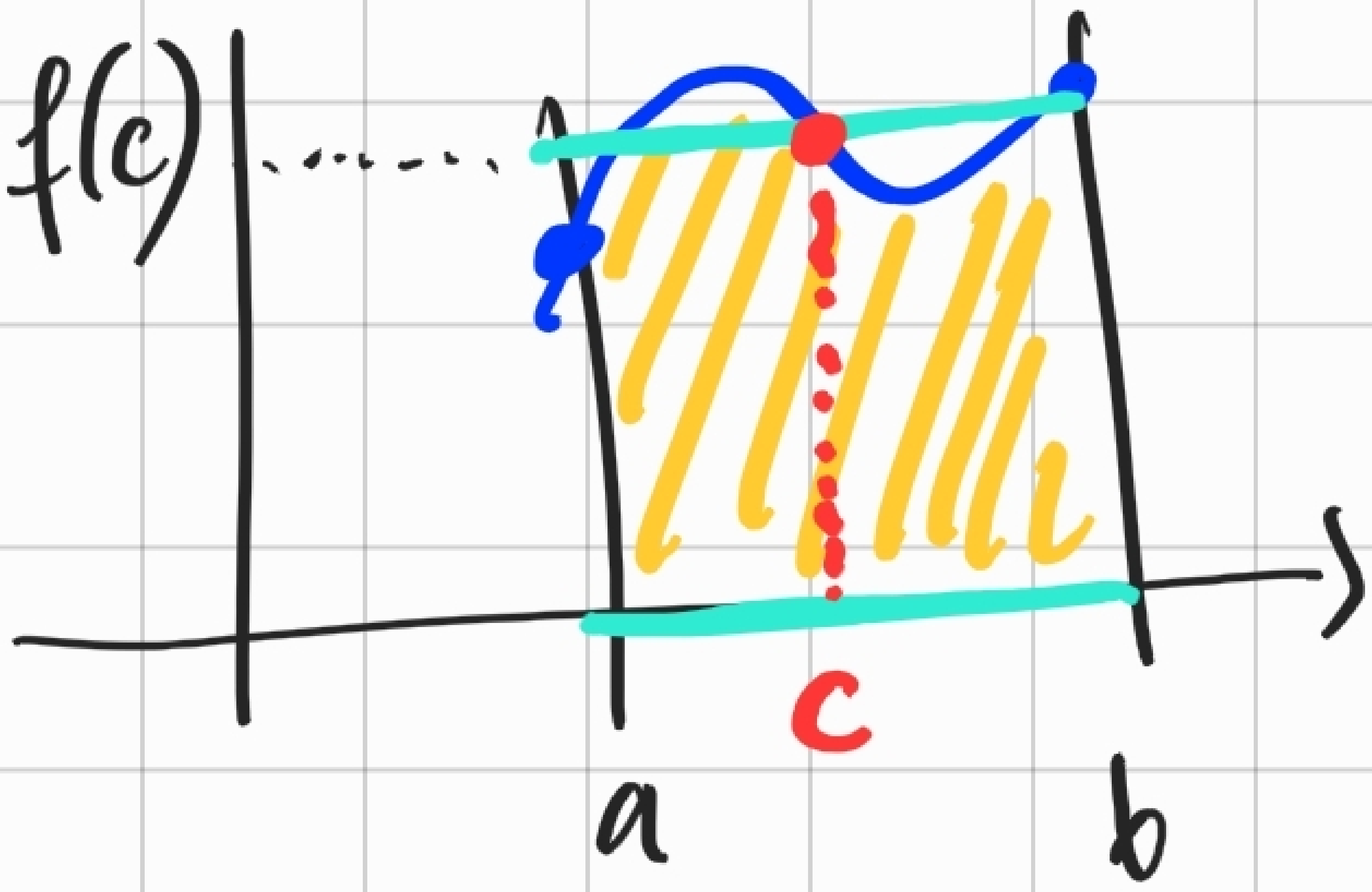
Teorema (della media integrale)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua.

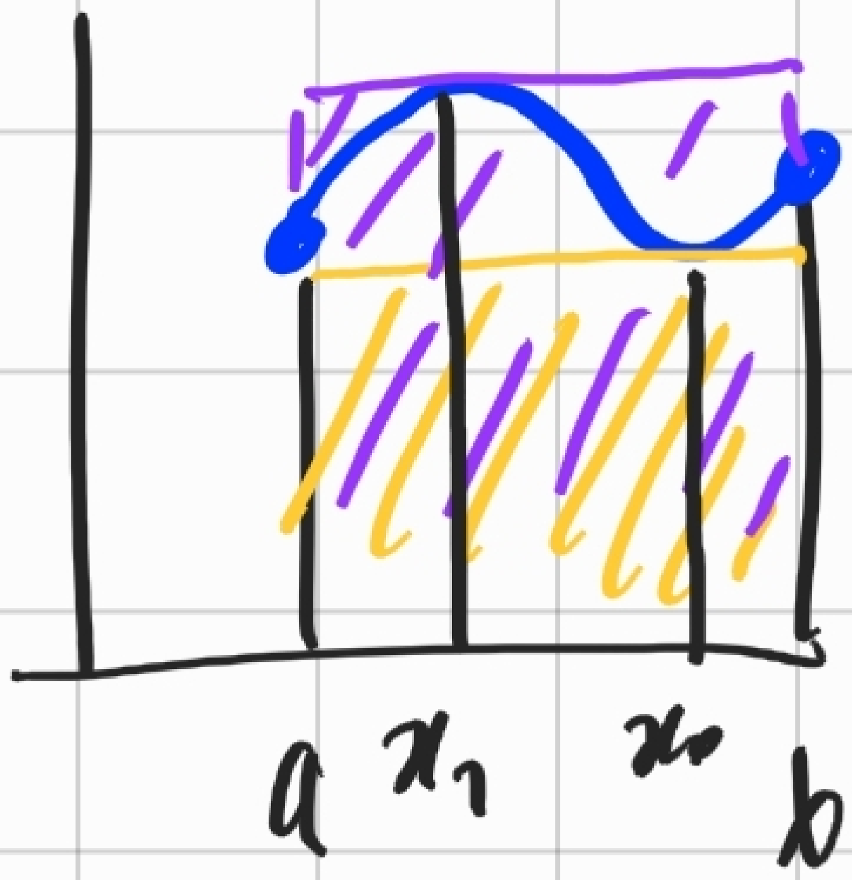
Allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx} = \boxed{(b-a)\cdot f(c)}$$

[Osservazione: se F: è la funzione integrale $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$]



dim



$P = \{a, b\}$

$$S^*(f,P) = (b-a) \cdot \sup_{[a,b]} f = \max f \leftarrow \text{Weierstraß}$$

$$S_*(f,P) = (b-a) \inf_{[a,b]} f = \min f \leftarrow \text{Weierstraß}$$

$$\boxed{S_*(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S^*(f,P)}$$

$$\underset{\substack{\| \\ f(x_0)}}{\min f} \leq \boxed{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}} \leq \underset{\substack{\| \\ f(x_1)}}{\max f}$$

Per il teorema dei valori intermedi

$\exists \; c \in [a,b)$ t.c. $\quad f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

$\square$

Notazione

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = ⨍_a^b f(x)\,dx$$

$=$ valor medio di f su $[a,b]$.