ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 38 - 20.12.2021

SERIE DI POTENZE

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k} \qquad z \in \mathbb{C}, \ a_k \in \mathbb{C}$$

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \sum a_k z^k \text{ converge} \right\}$$

A: insieme di convergenza

ES $\quad a_k = 1 \qquad \boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k \overset{?}{=} \frac{1-z^n}{1-z} \qquad z \neq 1$$

$\cdot(1-z)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} = 1 - z^n$$

Se $|z| < 1$ $\qquad \dfrac{1-z^n}{1-z}$

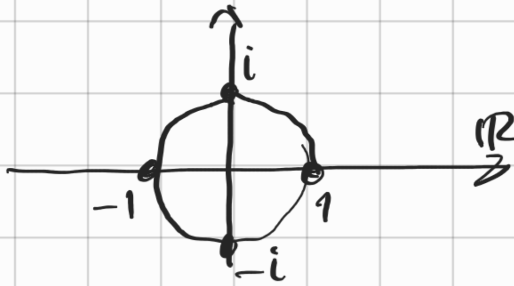
$z^n \to 0 \qquad |z^n| = |z|^n \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

Se $|z|>1$ $\qquad |z^n| = |z|^n \to +\infty$

z^n non tende a zero $\Rightarrow \sum z^n$ non converge.

Se $|z|=1$? $\qquad$ converge ?



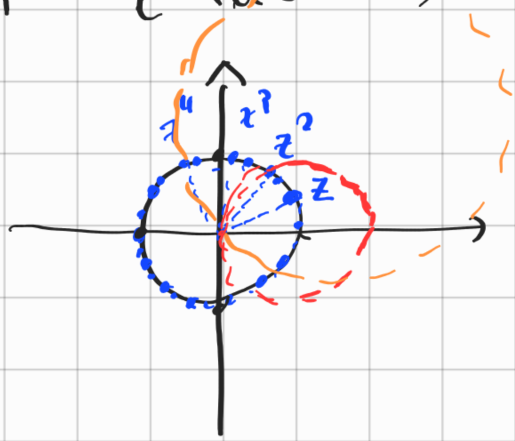
$z=1$ $\qquad z^n=1$

$\sum 1 = +\infty$ $\qquad$ è divergente

$z=-1$ $\qquad \sum (-1)^n$ è indeterminata.

$z\neq 1$

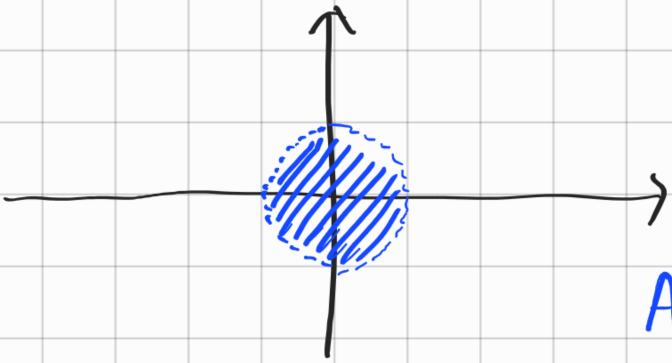
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$$



z^n è indeterminata

$1-z^n$ è indeterminata

$\frac{1}{1-z}\cdot(1-z^n)$ è indeterminata



A = l'insieme di convergenza

$A = \{z : |z|<1\}$.

Es $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k+1}$ criterio del rapporto:

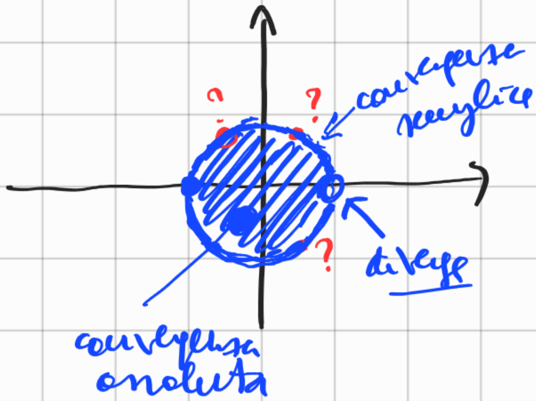
$$|a_k z^k| = \left|\frac{z^k}{k+1}\right| = \frac{|z|^k}{k+1}$$

$$\frac{|a_{k+1} z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = \frac{|z|^{k+1}}{k+2} \cdot \frac{k+1}{|z|^k} = |z| \cdot \frac{k+1}{k+2} \to |z|$$

se $|z|<1$ la serie converge assolutamente

se $|z|>1$ la serie non converge

$|a_k z^k| \to +\infty$



A

$z=1$ serie armonica

$z=(-1)$ serie armonica a segni alterni

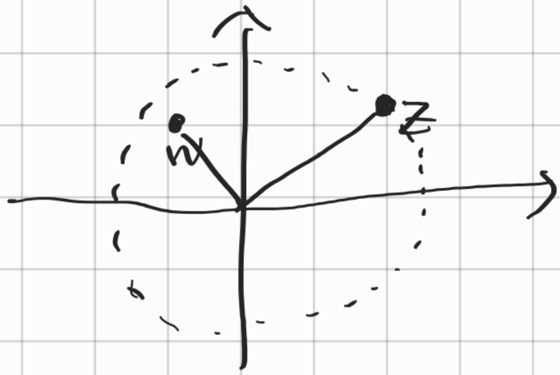
se $|z|=1$, $z \neq 1$ criterio di Dirichlet

Teo Sia $\sum a_k z^k$ una serie di potenze. Allora esiste $R \in [0,+\infty]$ chiamato "raggio di convergenza" tale che se $|z|<R$ la serie converge assolutamente
se $|z|>R$ la serie non converge
(anzi $|a_k z^k| \to +\infty$). Se $|z|=R$ in generale non possiamo dire niente.

Lemma $a_k z^k$ limitata $z \in A$

Se $\cancel{\sum a_k z^k}$ ~~è convergente~~

e se $|w| < |z|$ allora



$\sum a_k w^k$ è assolutamente convergente

$a_k z^k$ limitata significa che esiste $M > 0$

tale $|a_k z^k| \le M$

Se $\sum a_k z^k$ converge

$\Rightarrow a_k z^k \to 0 \Rightarrow a_k z^k$ è limitata.

Sia $|w| < |z|$ $\sum a_k w^k$ converge?

$$|a_k w^k| = \left| a_k z^k \cdot \frac{w^k}{z^k} \right|$$

$$= |a_k z^k| \cdot \left(\frac{|w|}{|z|}\right)^k \qquad q = \frac{|w|}{|z|}$$

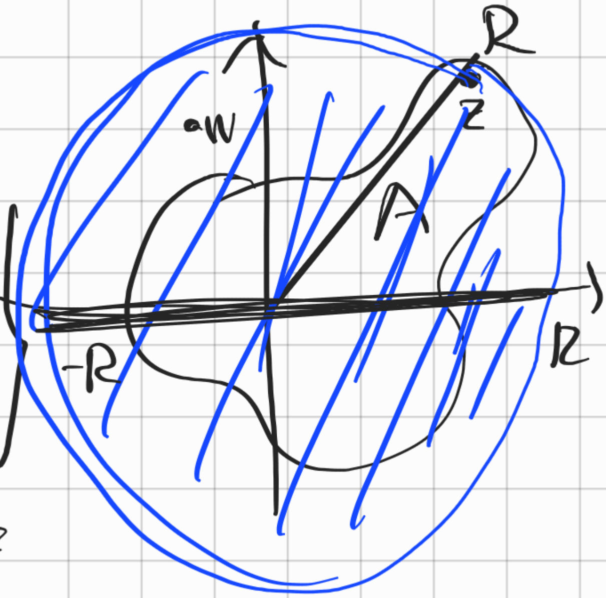
$$\le M \cdot q^k$$

$\sum M q^k$ converge in quanto $q < 1$.

□

dim Teorema

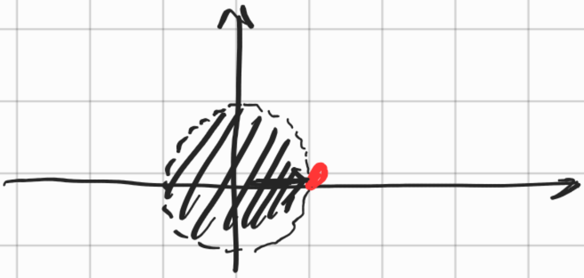
$$R = \sup\{|z| : \sum a_k z^k \text{ converge}\}$$



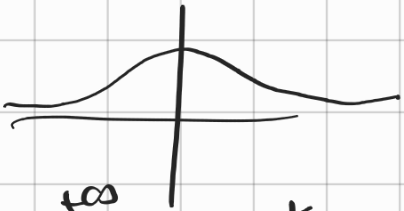
Se $|w| < R$ la serie converge assolutamente in w per il lemma. $\square$

Es. $$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}}$$ è definita per ogni $z \neq 1$

converge se $|z|<1$.

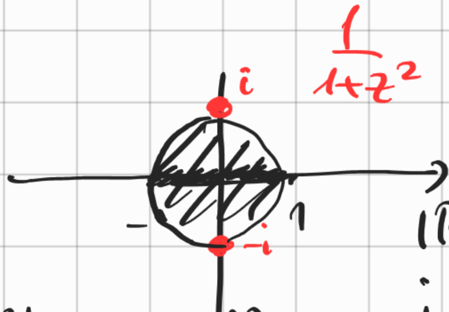


Es $$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-z}$$



$z = -x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j$$

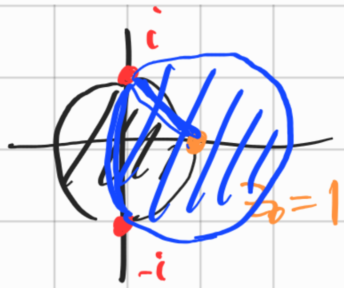


$$a_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ dispari} \\ (-1)^{j/2} & \text{se } j \text{ pari} \end{cases}$$

$\frac{1}{1+z^2}$ è definita in $\mathbb{C} \setminus \{i,-i\}$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_0)^k$$



$$\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

Come si calcola R? (il raggio di convergenza)

$$\sum a_k z^k$$

Studio $\sum |a_k z^k|$ con il criterio della radice o del rapporto.

radice
$$\sqrt[k]{|a_k z^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z| \to \ell \cdot |z| \overset{?}{<} 1$$

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Se $|z| < \frac{1}{\ell}$ la serie converge

se $|z| > \frac{1}{\ell}$ $a_k z^k \to \infty$ la serie non converge.

$$R = \frac{1}{\ell}$$

rapporto:
$$\frac{|a_{k+1} z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \cdot |z| \to \ell \cdot |z|$$

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \qquad R = \frac{1}{\ell}.$$

Se $\ell = 0$ la serie conv. su tutto $\mathbb{C}$

$$R = +\infty$$

Se $\ell = +\infty$ la serie converge solo per $z = 0$

$$R = 0$$

Es $\boxed{\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}}$ $R = +\infty$

$$\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{k+1} \to 0 = \ell$$

$$R = +\infty.$$

la serie è assolutamente conv. su tutto $\mathbb{C}$ (l'avevamo già visto).

Es $\sum_{k=0}^{+\infty} k^k z^k$ $\sqrt[k]{k^k} = k \to +\infty = \ell$

$$R = 0.$$

Questa serie converge solo se $z = 0$.

Oss

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \text{e il} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

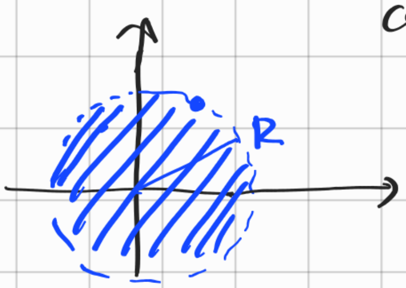
potrebbero non esistere.

Ma $\ell = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ esiste sempre

di nuovo $R = \frac{1}{\ell}$. $\square$

Teo Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{a_k z^k}$. Allora f è continua

in ogni z_0 t.c. $|z_0| < R$ (R = raggio di convergenza)



Lemma Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ ha

raggio di convergenza R allora anche

$\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot a_k z^k$ ha raggio di conv. R.

dim

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to+\infty} \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[k]{k}} \cdot \underbrace{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{R}$$

Se $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$ $\square$

(sugli appunti c'è una dimostrazione che non usa limsup)

ES

$$\sum \underbrace{2^k \cdot z^k}_{R=\frac{1}{2}} \longleftrightarrow \sum z^k \text{ ha } R=1$$

ES $\sum z^k$ e $\sum k^2 \cdot z^k$ e $\sum \frac{z^k}{k}$

hanno tutte lo stesso $R=1$.

---

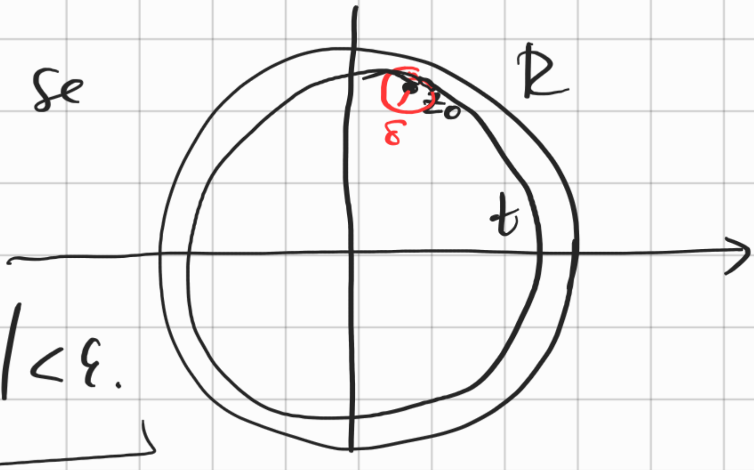
dim (continuità) $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

$|z_0|<R$ = raggio di conv.

f è continua in z_0 se

$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 :$

$$|z-z_0|<\delta \Rightarrow \underbrace{|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon}.$$



$0<\delta<R-|z_0|$

$$|f(z)-f(z_0)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \underbrace{(z^k - z_0^k)}\right|$$

$$(*) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \cdot |z^k - z_0^k|$$

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 \cdots x^{n-1})$$

$$z^k - z_0^k = (z - z_0) \cdot \underbrace{(z_0^{k-1} + z_0^{k-2} z + \dots + z_0 z^{k-2} + z^{k-1})}$$

$$|z^k - z_0^k| \leq |z - z_0| \cdot k \cdot \underbrace{t^{k-1}}$$

$|z_0| = r < t$ $\qquad$ $|z| \leq r + \delta = t$

$$(*) \leq \frac{|z - z_0|}{t} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot |a_k| \, t^k}$$

$\frac{|z-z_0|}{t} \to 0$

è convergente

$t < R$

D