ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 44 — 19. 1. 2022

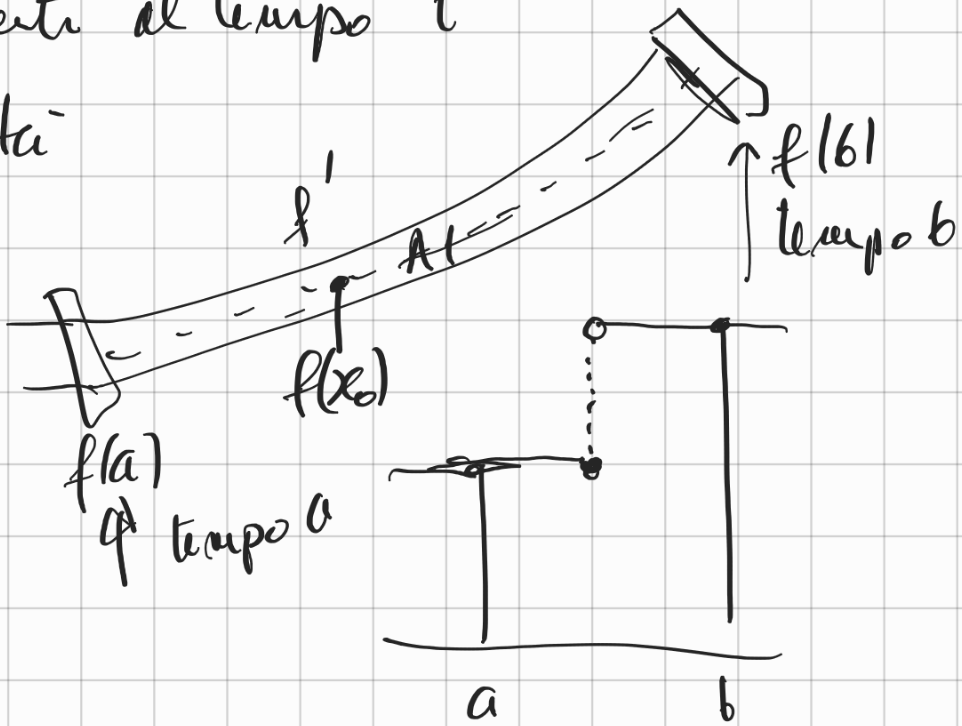
Weierstraß
Fermat
Rolle
Lagrange

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua
(a,b) derivabile
$f(a)=f(b)$

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Es $f(x)$ = spostamento al tempo t

$f'(x)$ = velocità



Criterio di monotonia Sia $f: I\to\mathbb{R}$, I intervallo $\subseteq\mathbb{R}$

(1) f continua su I, $J=(\inf I,\sup I)$ f derivabile su J. Allora

(i) Se $f'(x)\geq 0\ \forall x\in J \Rightarrow f$ è crescente su I

$\leq 0 \Rightarrow$ decrescente

$>0 \Rightarrow$ è strett. crescente

$<0 \Rightarrow$ strett. decrescente.

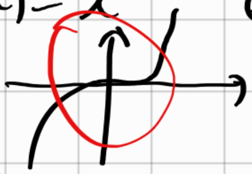
$=0 \Rightarrow$ costante

(2) Se $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ derivabile

Se f è crescente su A $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$

Se f è decrescente su A $\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in A$

[Es $f(x) = x^3$ è strett. cresc. ma $f'(0) = 0$]



<u>dim</u> (2)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

≥ 0 se f crescente.

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ □

<u>dim</u> (1) Siano $a, b \in I$, $a < b$.

Supponiamo $f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0 \quad \forall x \in J$. (i)

Vogliamo mostrare che $f(a) \underset{(<)}{\leq} f(b)$.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{L.}{=} f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0 \quad \exists x \in (a,b)$$

I è un intervallo.

(f è continua su $[a,b] \subseteq I$

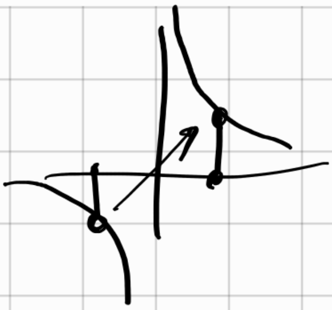
f è derivabile su $(a,b) \subseteq J$

posso applicare Lagrange □

<u>Es</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ma f non è decrescente

$-1 < 1$ ma $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$



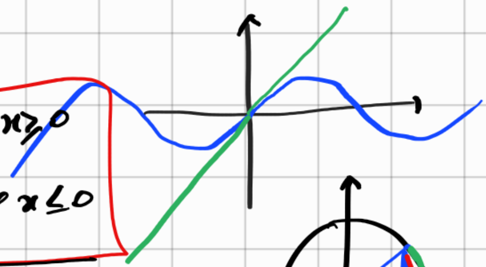
ES Dimostrare che $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

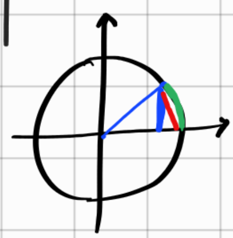
$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f(0) = 0$.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = f'(x) = \boxed{-\sin x + x}$

$= x - \sin x \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \geq 0 \\ \leq 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$





$\boxed{g(0) = 0}$

$g'(x) = f''(x) = \boxed{-\cos x + 1} \geq 0$

g è crescente

$g(x) \geq g(0)$ se $x \geq 0$ ($g(0) = 0$)

$g(x) \leq g(0)$ se $x \leq 0$

su $[0, +\infty)$ $f'(x) \geq 0$ f è crescente su $[0, +\infty)$

$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

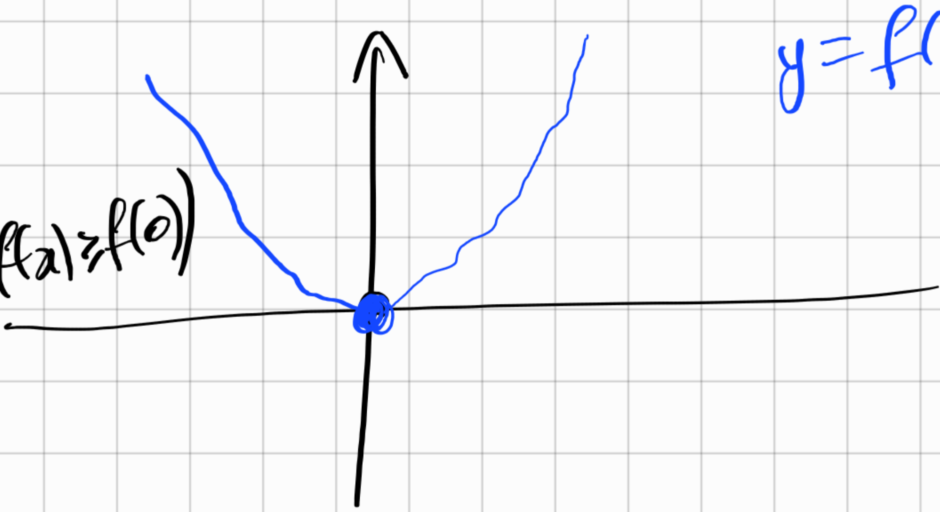
su $(-\infty, 0]$

$f'(x) \leq 0$

$\Downarrow$

f decresc.

$\Rightarrow (x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0))$



$y = f(x)$

$\square$

x		-2π		$[0$		$2\pi]$	
$g' = f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$
$g = f'$		$\nearrow$					$\nearrow$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f		$\searrow$		min 0		$\nearrow$	
f		$+$		0		$+$	

in $[0, +\infty)$ f è continua

in $(0, +\infty)$ $f' > 0$

f è strett. crescente su $[0, +\infty)$

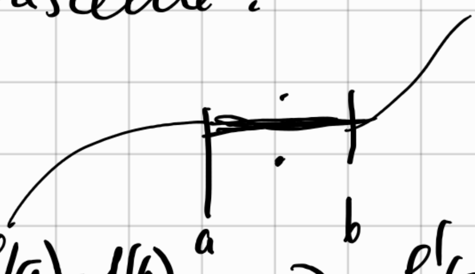
in $(-\infty, 0]$ f è continuo

in $(-\infty, 0)$ $f' < 0$

f è strett. decrescente su $(-\infty, 0]$

Quand'è che una funzione crescente non è strettamente crescente?

$\exists\, a < b$ t.c. $f(a) = f(b)$



$\Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $f(x) = f(a) = f(b)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$

Se $f' \geq 0$ su un intervallo I

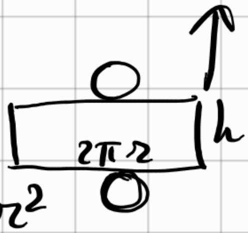
e $f' = 0$ su un insieme numerabile.

allora f è strett. crescente

Ovvero basta che $\{x : f'(x) = 0\}$ non contenga intervalli non banali.

Es (problema di ottimizzazione) $h \updownarrow$

$V = 33\,cl$



$V = \pi \cdot h r^2$

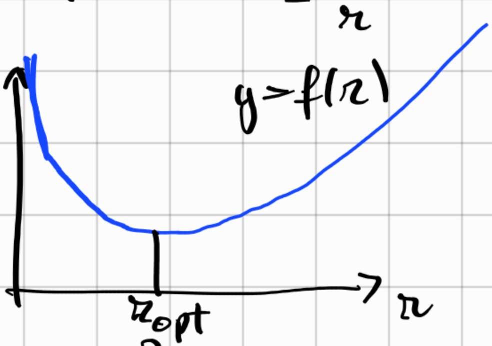
$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$\downarrow$

min

$$S = f(r) = 2\cancel{\pi}\cancel{r}\frac{V}{\cancel{\pi}\cancel{r^2}} + 2\pi r^2 = 2\frac{V}{r} + 2\pi r^2$$



$\lim_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$

$\lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$

$$f'(r) = -2\frac{V}{r^2} + 4\pi r \overset{?}{\gtreqless} 0$$

$f'(r) > 0 \qquad 4\pi r > 2\frac{V}{r^2} \iff 4\pi r^3 > 2V$

$\Updownarrow$

$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \iff r^3 > \frac{V}{2\pi}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	
$f'(r)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(r)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$r_{opt} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{33\,cl}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{330}{2\pi}}\ cm \simeq 3{,}74\ cm.$$

$$h_{opt} = \frac{V}{\pi r^2} \simeq 7{,}49\ cm$$

Risoluzione di una equazione

$$x + x^3 + x^7 = 2$$

$$\boxed{f(x) = \underbrace{x + x^3 + x^7}\ - 2}$$

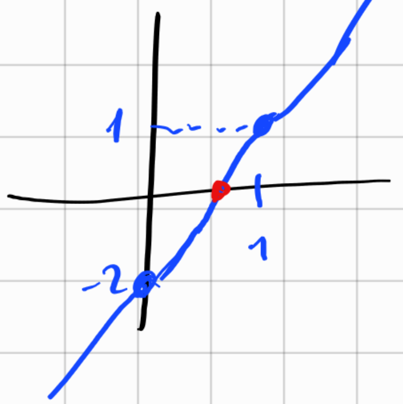
$$\boxed{e^x = x^3}$$

$x^2 = 2$ $\qquad$ $\boxed{x = \pm\sqrt{2}}$

f è strettamente crescente

f è continua

$f(0) = -2,$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

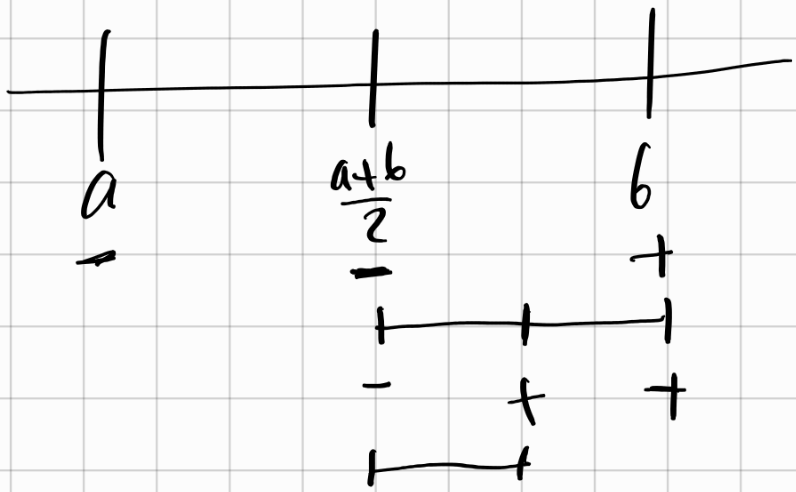
$f(1) = 1$

Teorema degli zeri $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$(f(a) \leq 0$ e $f(b) \geq 0)$ oppure $(f(a) \geq 0$ e $f(b) \leq 0)$

Allora esiste $x_0 \in [a,b]$ t.c. $f(x_0) = 0$.

dim (metodo di bisezione)



$[a_k, b_k]$ $\quad a_k$ crescente

$a_k \to \ell$ $\quad b_k - a_k \to 0$

$b_k \to \ell$ $\quad f(a_k) \leq 0$

$f(b_k) \geq 0$

$f(a_k) \to f(\ell) \leq 0$