ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 50 - 10.2.2023

<u>FUNZIONE ANALITICA</u> $f: A\subseteq \mathbb{C}\to\mathbb{C}$

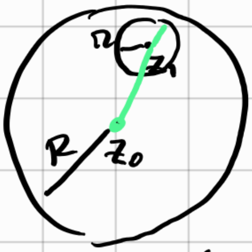
oppure $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

f è analitica se $\forall z_0\in A\ \exists r>0$ t.c. esistono a_k

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\cdot(z-z_0)^k \qquad \forall z\in B_r(z_0)$$

Lemma (traslazione delle serie di potenze)

$B_r(z_1)\subseteq B_R(z_0) \Leftarrow \underbrace{r+|z_1-z_0|<R}$



$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$$ converge assolutamente in $B_R(z_0)$.

Allora $\exists\, b_k$:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(z-z_1)^k \qquad \forall z\in B_r(z_1)$$

dim Fissato $z\in B_r(z_1)$

$|z-z_1|<r$

$|z-z_1|+|z_1-z_0|<R$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\,(\underbrace{|z-z_1|}+|z_1-z_0|)^k < +\infty$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|z-z_1|^j\,|z_1-z_0|^{k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}|a_k|\binom{k}{j}|z-z_1|^j\,|z_1-z_0|^{k-j}$$

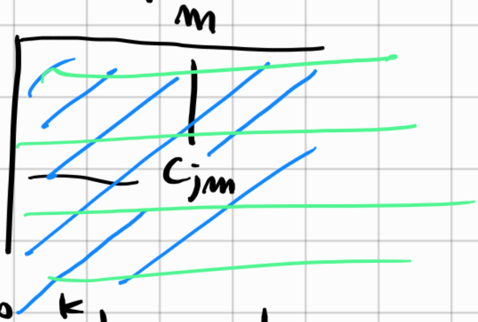
$m=k-j \qquad k=m+j$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} c_{j,k-j}$$

Th ?

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} c_{j,m}$$

$$c_{j,m} = a_{j+m} \binom{j+m}{j} (z-z_1)^j (z_1-z_0)^m$$



Hyp: $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} |c_{j,k-j}| < +\infty$

[oppure $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |c_{j,m}| < +\infty$]

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \boxed{\sum_{m=0}^{+\infty} a_{j+m} \binom{j+m}{j} (z_1-z_0)^m} (z-z_1)^j$$

$$b_j = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{j+m} \binom{j+m}{j} (z_1-z_0)^m$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j (z-z_1)^j$$

□

Teo (derivabilità di una serie di potenze)

Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ ha raggio di conv. R

allora $\forall z \in B_R(0)$ f è derivabile in z e

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k z^{k-1}$$

Corollario Se f è analitica f è C^∞ □

Th olomorfe

Vedrete che se f è derivabile in senso complesso allora f è analitica

dim (teo) $|z|<R$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$|z+h|<R$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+h)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k}{h} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \boxed{\frac{[(z+h)^k - z^k]}{h}}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{h} \cdot \boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} z^j h^{k-j}} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} z^j h^{k-j-1}$$

$m = k-j-1$

$k = m+j+1$

$$\left[(z+h)^k - z^k = \cancel{z^k} + k z^{k-1} h + \frac{k(k-1)}{2} z^{k-2} h^2 + \dots + h^k - \cancel{z^k} \right]$$

somma alla Cauchy (si può fare)

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} a_{m+j+1} \binom{m+j+1}{j} z^j} h^m \xrightarrow{h \to 0} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+1} \binom{j+1}{j} z^j = (*)$$

\# rimane $m=0$

continuità delle somme di una serie di potenze

$$\binom{j+1}{j} = \frac{(j+1)!}{j!\,1!} = j+1$$

$$(*) = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) a_{j+1} z^j = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k z^{k-1} \qquad \square$$

$k = j+1$

\# $g(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m \cdot h^m$ $= b_0 + b_1 \cdot h + b_2 h^2 + \dots$

Teo g è continua.

$$\lim_{h \to 0} g(h) = g(0) = b_0$$

Es $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

$$\frac{e^x - e^0}{x} = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}{x} =$$

$$= \underbrace{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \cdots\cdots}\ \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

<u>Nota</u> $\dfrac{e^x - 1}{x}$ è una funzione analitica

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}} \qquad \text{es: } \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!}} = \left[\frac{e^x - 1}{x}\right]_{x=2} = \frac{e^2 - 1}{2}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x}$$

ES Calcolare $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2^j}{j!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^j}{j!} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

<u>Corollario</u>

se $\displaystyle f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k\, z^{k-1}$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, a_k\, z^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} \overbrace{k(k-1)\cdots(k-n+1)}^{n \text{ fattori}}\, a_k\, z^{k-n}$$

$k=n$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdots 1 \cdot a_n = n!\, a_n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sum b_k (z-z_0)^k \\ b_k = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\end{gathered}}$$

Se f è analitica f coincide localmente con la sua serie di Taylor:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ posso scrivere la serie di Taylor: $z_0=0$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot z^k$$

se converge,

posso affermare che $\underbrace{f(x)=g(x)}$? **NO**

Notiamo che g è analitica $g^{(k)}(0)=k!a_k=f^{(k)}(0)$.
quindi $f-g\in C^\infty$ e ha tutte le derivate nulle in $x=0$. $f-g=0+o(x^n)$

Esempio ($f\in C^\infty$ ma non analitica)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

f è derivabile infinite volte in $x=0$ e tutte le derivate sono nulle.

idea: $\underbrace{f(x)=o(x^n)}_{\Uparrow}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Se P pol. di Taylor di ordine n

Peano: $f(x)=P(x)+o((x-x_0)^n)$

Formula di Taylor con resto di Lagrange.

Sia P il pol. di Taylor di f di ordine n centrato in x_0, sia f derivabile (n+1) volte.

$\exists y \in [x_0, x]$
$(x, x_0]$

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dim Tesi: $\exists y$:

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}$$

Lo dimostro per induzione su n.

$n=0$ $\quad \frac{f(x)-P(x)}{x-x_0} \overset{?}{=} f'(y)$ è Lagrange!

Supponiamo di aver fatto il caso n-1 dimostriamo n.

$$\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{[f(x)-P(x)]-[f(x_0)-P(x_0)]}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}$$

Cauchy $\exists y$

Ipotesi induttiva z

$$= \frac{f'(y)-P'(y)}{(n+1)\cdot\underbrace{(y-x_0)^n}} = \frac{(f')^{(n)}(z)}{(n+1)\cdot n!} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}$$

$\square$