ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 59 - 3.3.2023

Teorema fondamentale:

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua, $x_0 \in I$, posto

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \qquad \text{(funzione integrale)}$$

$F: I \to \mathbb{R}$, $\underbrace{F \text{ è derivabile, } F' = f.}_{F \text{ è una primitiva di } f.}$

Formula:

Se G è una qualunque primitiva di f:

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Notazione
$$[G]_a^b = G(b) - G(a)$$
$$\| $$
$$[G(x)]_{x=a}^{b}$$

Es $\quad G(x) = \ln x \qquad G'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \underset{0}{\underset{\|}{\ln 1}} = \ln 2 \qquad \square.$$

Notazione (integrale indefinito)

$$\int f = \{ F : F' = f \} = \{\text{primitive di } f\}.$$
$$\|$$
$$\int f(x)\,dx.$$

operatore lineare

$$D : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spazio vett.}}}{\{\text{funzioni derivabili}\}} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spazio vett.}}}{\{\text{funzioni}\}}$$

$$\int f = D^{-1}(\{f\})$$

Esempi $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\qquad \int_0^x H =$ 

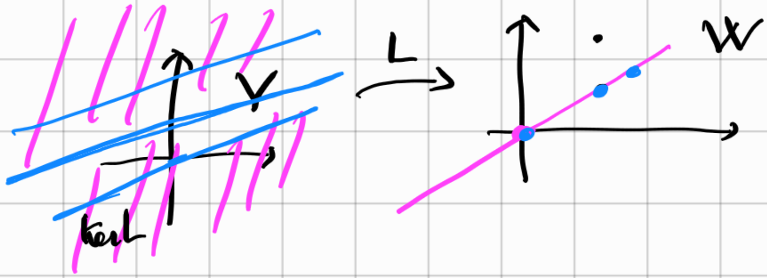
$$\int H = \emptyset$$

Ma se f è continua su ogni intervallo ammette primitive per il Teo. Fondamentale.

In astratto: $\quad L : V \to W$ lineare

$f \in W \qquad L^{-1}(\{f\}) = ?$

① Se $f \notin \operatorname{Im} L$
$L^{-1}(\{f\}) = \emptyset$



② Se $f \in \operatorname{Im} L$
$\dim L^{-1}(\{f\}) = \dim \ker L = L^{-1}(\{0\})$

D non è iniettivo: $\qquad Dc = 0.$

funzione costante

$\{\text{costanti}\} \subseteq \ker D.$

Oss Se $f : I \to \mathbb{R}$, $f' = 0$ allora f è costante

$$D : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}^I \qquad \ker D = \mathbb{R}$$

costante

$$\int f = \{\text{primitive di } f \text{ su } I\} = \emptyset \quad = F + c$$

una primitiva

Es $\displaystyle\int \sin x \, dx = \{-\cos x + c : c \in \mathbb{R}\}$

Tipicamente si scrive $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

Attenzione se I non è un intervallo ci sono funzioni non costanti con derivata nulla.

Es

Es

$$\int \frac{1}{x}\,dx \ni \ln|x|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$ NO

ci sono altre primitive

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{se } x>0 \\ \ln(-x) & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$D\ln|x| = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x>0 \\ -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$\ln|x|$ è una primitiva $\Rightarrow$ $\ln|x| + c$ altre primitive.

ce ne sono di più:

$$\int \ln|x| = \left\{ F(x) = \begin{cases} \ln x + c & \text{se } x>0 \\ \ln(-x) + d & \text{se } x<0 \end{cases} : c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

In pratica dovrei scrivere:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \{ \quad \}$$

potrei scrivere: $\int \frac{1}{x}\,dx \ni \ln|x|$

potrei scrivere: $\int \frac{1}{x}\,dx \supseteq \{\ln|x| + c\}$

scrivo: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$ abuso oppure: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

funzione costante.

Perché la notazione $\int f$ è così simile a $\int_a^b f$

integrale indefinito (operatore inverso della derivata)

integrale vero e proprio.

Perché: se f è continua, per la formula fondamentale si ha:

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b$$

RICERCA della PRIMITIVA

Qual è la primitiva di una funzione data?

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \xmapsto{D} x^{\alpha}$$

$$\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x|$$

INTEGRALI IMMEDIATI

$$e^x \xmapsto{D} e^x \qquad \int e^x = e^x$$

$$\sin \xmapsto{D} \cos \qquad \int \cos x = \sin x$$

$$\cos \xmapsto{D} -\sin \qquad \int \sin x = -\cos x$$

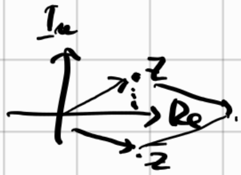
$$\operatorname{arctg} x \xmapsto{D} \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\arcsin x \xmapsto{D} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

LE VEDIAMO ORA!

$$\operatorname{settsinh} x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{settsinh} x$$

$\left[\ \mathrm{settcosh}\, x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \mathrm{settcosh}\, x\ \right]$



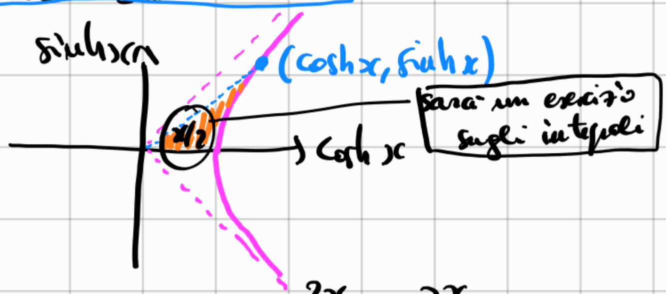
FUNZIONI IPERBOLICHE

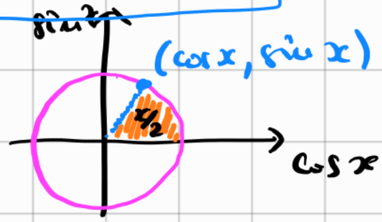
$$\begin{cases} \cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\[2ex] \sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

ANALOGIA

$$\left[\ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\ \right]$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1} \qquad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1.}$$





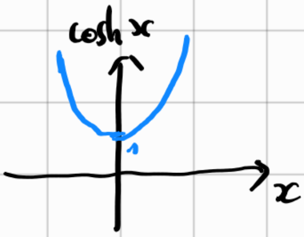
dim

$$\cosh^2 x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

$$\sinh^2 x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$$

□

Grafico



e^x	$\cosh x$ $D\downarrow\ \uparrow D$ $\sinh x$	$\sin x$ $\downarrow D$ $\cos x$ $\downarrow D$ $-\sin x$ $\downarrow D$ $-\cos x$

Derivate:

$$D \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$D \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile

l'inversa si chiama $\mathrm{settsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Esercizio $\quad \text{settsinh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = y$

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} \qquad t = e^y$$

eq. di II grado in t .....

Derivata dell'inversa:

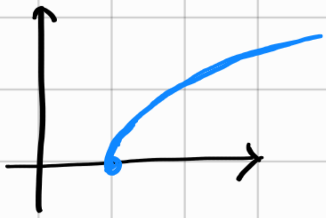
$$(\text{settsinh}\, x)' = \frac{1}{\cosh(\text{settsinh}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\text{settsinh}\, x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Invertiamo il cosh:

$\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ è invertibile

$\text{settcosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ è la funzione inversa.



ES $\quad \text{settcosh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$ $\quad \boxed{\cosh^2 - \sinh^2 = 1}$

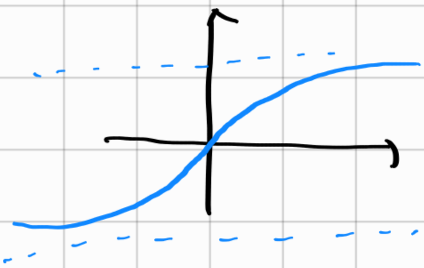
Derivata $\quad (\text{settcosh}\, x)' = \dfrac{1}{\sinh(\text{settcosh}\, x)} = \dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2(\ldots) - 1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\square$

tangente iperbolica: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cosh^2 x} \\ 1 - \operatorname{tgh}^2 x \end{cases}$$



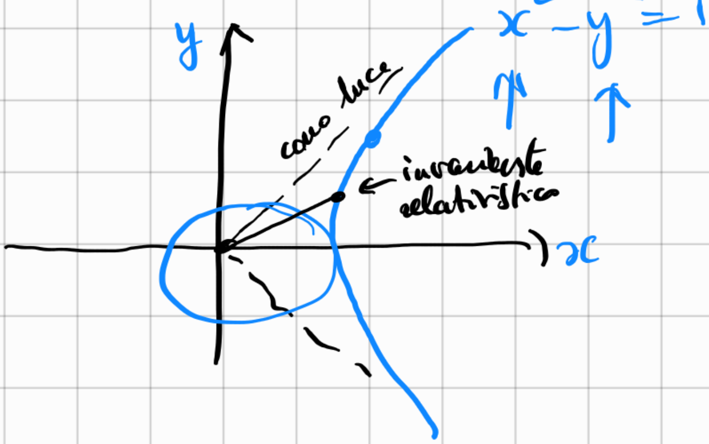
$\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ è invertibile

$\operatorname{setttgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

Formule di addizione:

$$\begin{cases} \cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha \cosh\beta + \sinh\alpha \sinh\beta \\ \sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha \cosh\beta + \sinh\beta \cosh\alpha \end{cases}$$

⌂ verificare queste formule.



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$