ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 76 - 18.4.2023

Eq. lineari a coeff. costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot u' + a_0 \cdot u = b(x) \qquad (1)$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0}$$

(1) $\qquad P(D)[u] = b \qquad\qquad L = P(D)$

$L[u] = b$

Sappiamo risolvere $L[u]=0$ (2)

le soluzioni sono : $\ker L = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$

$u_k = x^{m_k} e^{\lambda_k x}$ $\qquad \lambda_k$ radici di P

$m_k = 0, 1, \dots, M_k - 1 \qquad M_k =$ molt. di λ_k.

Per risolvere (1) basta trovare una sola soluzione (sol. particolare) u_* $\qquad L[u_*] = b$

Allora tutte le sol. : $u \in \underset{u_0}{\ker L} + u_*$

Metodo di similarità

Se $b(x) = q(x) \cdot e^{\mu x}$ trovo una sol. della forma:

$$u_*(x) = \tilde{q}(x) \cdot x^m \cdot e^{\mu x}$$

con $\deg \tilde{q} = \deg q$, m è la molteplicità di μ come radice di $\boxed{P}$

($m=0$ se $P(\mu) \neq 0$.)

Ovviamente possiamo sfruttare il principio di sovrapposizione. Per trovare una sol. di:

$$L[u] = g_1 + g_2$$

$$L[u_*] = g_1 \qquad L[u_{**}] = g_2$$

$$L[u_* + u_{**}] = L[u_*] + L[u_{**}] = g_1 + g_2.$$

<u>Es</u> Una sol. di: $u'' - 3u' + 2u = 7 + \frac{2}{e^x}$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$

è della forma: $u_*(x) = A + B \cdot e^{-x}$

Butto u_* nell'equazione e trovo A e B.

Tutto questo vale se $\mu \in \mathbb{C}$.

<u>Es</u> Una sol. di: $u'' - 3u' + 2u = \sin x$

è della forma:

$$u_*(x) = A \cdot \sin x + B \cos x$$

In generale:

$$g = q(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$u_* = \tilde{q}_1(x) x^m e^{\alpha x} \sin \beta x + \tilde{q}_2(x) x^m e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$\deg \tilde{q}_1 = \deg \tilde{q}_2 = \deg q$, m molteplicità di $\mu = \boxed{\alpha \pm i\beta}$.

Infatti:

$$\begin{cases} \sin \beta x = \dfrac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \\ \cos \beta x = \dfrac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \end{cases}$$

sono combinazioni di $e^{i\beta x}$ e $e^{-i\beta x}$.

ES (oscillatore forzato). $\omega, \beta \in \mathbb{R}$ fissati

(1) $$u'' + \omega^2 u = \sin(\beta x)$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

le sol. dell'omogenea:

$$u(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

Una sol. particolare è:

(a) se $\boxed{\beta \neq \omega}$ $\quad \mu = i\beta$ non è radice di P.

$$u_*(x) = C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x).$$

$$u_*'(x) = C\beta\cos(\beta x) - D\beta\sin\beta x$$

$$u_*''(x) = -C\beta^2\sin(\beta x) - D\beta^2\cos\beta x$$

Butto u_* in (1):

$$u_*'' + \omega^2 u_* = \left(-C\beta^2 + \omega^2 C\right)\sin\beta x + \left(-D\beta^2 + \omega^2 D\right)\cos\beta x$$

$$\overset{!}{=} \quad 1 \cdot \sin\beta x \quad + \quad 0 \cdot \cos\beta x$$

$$\begin{cases} -C\beta^2 + \omega^2 C = 1 \\ -D\beta^2 + \omega^2 D = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = \dfrac{1}{\omega^2 - \beta^2} \\ D = 0 \end{cases}$$

Tutte le sol. di (1) sono:

$$u(x) = \frac{1}{\omega^2 - \beta^2}\sin\beta x + A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

(b) $\beta = \omega$, $\quad \mu = i\omega$ è radice di $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$.
con molteplicità $m = 1$.

$$u_p(x) = C \cdot x \cdot \sin \omega x + D x \cos \omega x$$

$$u_p'(x) = C \sin \omega x + D \cos \omega x + C\omega x \cos \omega x - D\omega x \sin \omega x$$

$$u_p''(x) = 2C\omega \cos \omega x - 2D\omega \sin \omega x - C\omega^2 x \sin \omega x - D\omega^2 x \cos \omega x$$

Butto u_p in (1)

$$u_p'' + \omega^2 u_p = 2C\omega \cos \omega x - 2D\omega \sin \omega x + \left(\cancel{C\omega^2 x} - \cancel{C\omega^2 x}\right) \sin \omega x + \left(\cancel{D\omega^2 x} - \cancel{D\omega^2 x}\right) \cos \omega x$$

$$\overset{!}{=} 1 \cdot \sin \omega x + 0 \cdot \cos \omega x$$

$$\begin{cases} 2C\omega = 0 \\ -2D\omega = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 0 \\ D = -\dfrac{1}{2\omega} \end{cases}$$

la soluzione particolare è $\quad u_p(x) = -\dfrac{1}{2\omega} x \cos \omega x$

la soluzione generale di (1) è:

$$u(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x - \frac{1}{2\omega} x \cos \omega x$$

$$= \left(A - \frac{x}{2\omega}\right) \cos \omega x + B \sin \omega x$$

ALTRO METODO

METODO della VARIAZIONE delle COSTANTI

+ generale
− facile.

(1) $L[u]=g$. $\qquad L=P(D)$ $\qquad$ P polinomio associato.

$u_1,\dots,u_n$ soluzioni indipendenti della omogenea $L[u]=0$. (2)

(NOTA: l'eq. potrebbe anche essere a coefficienti variabili).

Trovo una sol. della (1) in questa forma:

$$u_*(x)=c_1(x)u_1(x)+\dots\dots+c_n(x)u_n(x).$$

con
$$\begin{cases} c_1'u_1+\dots+c_n'u_n=0 & (*) \\ c_1'u_1'+\dots+c_n'u_n'=0 & (**) \\ c_1'u_1''+\dots+c_n'u_n''=0 \\ \vdots \\ c_1'u_1^{(n-2)}+\dots+c_nu_n^{(n-2)}=0 \\ \boxed{c_1'u_1^{(n-1)}+\dots+c_nu_n^{(n-1)}=b} & (*^n) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}}_{W(x)}\cdot\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x)\end{bmatrix}$$

$W(x)$ è la matrice "Wronskiana".

<u>Teor.</u> Se $u_1\dots u_n$ sono sol. indip. di un sistema lineare omogeneo allora $\det W(x)\neq 0$ $\quad\forall x$.

Verifichiamo che effettivamente u_* è soluzione di (1).

$$\to \quad u_* = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot u_k \qquad \Big| \cdot a_0$$

$$\to \quad u_*' = \cancel{\sum c_k' \cdot u_k} + \sum c_k \cdot u_k' \qquad \Big| \cdot a_1$$

(*)

$$j \to \quad u_*'' = \cancel{\sum c_k' u_k'} + \sum c_k \cdot u_k'' \qquad \Big| \cdot a_2$$

(**)

$$\vdots$$

$$\to \quad u_*^{(n-1)} = \cancel{\sum c_k' u_k^{(n-2)}} + \sum c_k \cdot u_k^{(n-1)} \qquad \Big| \cdot a_{n-1}$$

$$\to \quad u_*^{(n)} = \sum c_k' u_k^{(n-1)} + \sum c_k \, u_k^{(n)} \qquad \Big| \cdot 1$$

$(*)^n$

$$= b(x) + \sum c_k u_k^{(n)}$$

---

butto u_* in (1): $\qquad a_n = 1$

$$L[u_*] = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot u_*^{(j)} = b(x) + \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} c_k u_k^{(j)}$$

$$= b(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot u_k^{(j)}$$

$$= b(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \, \cancel{L[u_k]}$$

u_k è sol. di (2)

$$= b(x)$$

ξ

Esempio

$$u''(x) + u(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \qquad \lambda_{12} = \pm i$

le soluzioni dell'omogenea sono:

$$u_0(x) = A\cos x + B \sin x$$

$$u_1(x) = \cos x \qquad u_2(x) = \sin x$$

Cerco u_* della forma:

$$u_*(x) = C_1(x)\cdot \cos x + C_2(x)\cdot \sin x$$

(*)

$$u_*'(x) = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x + \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$u_*''(x) = -C_1(x)\cdot\cos x - C_2(x)\sin x +$$

Butto u_* in (1):

$$u_*'' + u_* = -C_1(x)\cancel{\cos x} - C_2(x)\cancel{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + C_1(x)\cancel{\cos x} + C_2(x)\cancel{\sin x}$$

$$\left[= C_1(x)[\cancel{u_1'' + u_1}] + C_2(x)\cdot[\cancel{u_2'' + u_2}]\right] + \frac{1}{\cos x}$$

$$L[u_*] = \frac{1}{\cos x}.$$

Dobbiamo risolvere il sistema (*)

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ c_1'(-\sin x) + c_2' \cdot \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2' = -c_1' \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} \\ c_1'\left(-\sin x - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$-c_1' \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \qquad \begin{cases} c_1' = -\operatorname{tg} x \\ c_2' = 1 \end{cases}$$

$$c_2(x) = \int 1 = x$$

$$c_1(x) = -\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

$$u_*(x) = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$$

Tutte le sol. sono:

$$u(x) = u_*(x) + u_0(x) = \underbrace{(A + \ln|\cos x|) \cdot \cos x + (B + x) \cdot \sin x}$$

$\square$

[Oss A e B sono costanti su ogni intervallo in cui $\cos x$ non si annulla.]