ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 14 – 16.4.2024

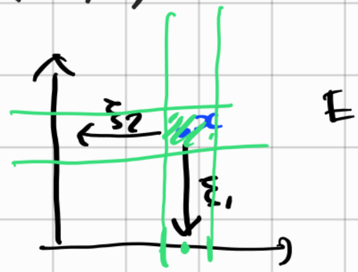
TOPOLOGIA DEBOLE

E spazio di Banach $E^* = \{ \xi : E \to \mathbb{R} \mid \xi \text{ lineare e continuo} \}$
la topologia debole su E è la topologia σ meno fine tale che ogni $\xi \in E^*$ risulta continuo rispetto a σ

In generale se E è un s. vettoriale, $\Xi \subseteq E' = \{ \xi : E \to \mathbb{R}, \text{lineare} \}$
definiamo su E la topologia $\sigma = \sigma(E, \Xi)$.
Gli intorni di 0 per σ sono gli insiemi $U \subseteq E$ tali che: $\qquad I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$

$\exists\, \xi_1, \dots \xi_N \in \Xi$, $\exists\, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_N > 0$ tali che:

$$U \supseteq \xi_1^{-1}(I_{\varepsilon_1}) \cap \dots \cap \xi_N^{-1}(I_{\varepsilon_N})$$



Nota 1 $\mathcal{U}_0$ è una famiglia di intorni di 0.

- $0 \in U \quad \forall U \in \mathcal{U}_0$
- $U, V \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_0$
- $U \supseteq V, V \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow U \in \mathcal{U}_0$

assiomi degli intorni.

$\mathcal{U}_x$ gli intorni di $x \in E$ sono le traslazioni in x degli intorni di 0: $\quad \mathcal{U}_x = \{ x + U : U \in \mathcal{U}_0 \}$.
$\Rightarrow \sigma$, definita tramite $\mathcal{U}_x$, è una topologia.

Nota 2 Ogni $\xi : E \to \mathbb{R}$, $\xi \in \Xi$, ξ è continuo su (E, σ).

Nota 3 σ è la più piccola (meno fine) topologia che rende continuo ogni $\xi \in \Xi$.

$\sigma = \sigma(E, \Xi)$ si chiama <u>topologia iniziale</u> su E

Se E è Banach $\sigma(E, E^*)$ si chiama anche topologia debole su E.

Lemma Sia $\sigma = \sigma(E, \Xi)$ con $\Xi \subseteq E'$ E s.v.
Allora:
$$x_n \xrightarrow{\sigma} x \iff \forall \xi \in \Xi : \quad \xi(x_n) \to \xi(x) \text{ in } \mathbb{R}$$

dim

- $x_n \xrightarrow{\sigma} x \iff x_n - x \xrightarrow{\sigma} 0$
- $\xi(x_n) \to \xi(x) \iff \xi(x_n) - \xi(x) \to 0 \iff \xi(x_n - x) \to 0$

Basta mostrare che $x_n \xrightarrow{\sigma} 0 \iff \forall \xi \in \Xi \quad \xi(x_n) \to 0$ in $\mathbb{R}$

"$\Rightarrow$" Supponiamo $x_n \xrightarrow{\sigma} 0$
significa $\forall U \in \mathcal{U}_0 \; \exists N : \forall n > N : x_n \in U$
Devo mostrare che $\forall \xi \in \Xi$ si ha $\xi(x_n) \to 0$.
Data $\xi \in \Xi$, dato $\varepsilon > 0$ $\quad U = \xi^{-1}(I_\varepsilon) \in \mathcal{U}_0$.
$\exists N : \forall n > N : x_n \in U. \Rightarrow \xi(x_n) \in I_\varepsilon \Rightarrow |\xi(x_n)| < \varepsilon$,
$\forall \xi \in \Xi \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N : \; |\xi(x_n)| < \varepsilon$
ovvero $\xi(x_n) \to 0$. $\square$

Bastava dire che siccome ξ è continuo rispetto a σ
$$x_n \xrightarrow{\sigma} x \Rightarrow \xi(x_n) \to \xi(x).$$

"$\Leftarrow$" Supponiamo $\forall \xi \in \Xi : \; \xi(x_n) \to 0$
Dobbiamo mostrare che $\forall U \in \mathcal{U}_0 \; \exists N : \forall n > N : \; x_n \in U$.
Dato U esistono $\xi_1, \dots \xi_M \in \Xi$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M > 0$
tali che
$$U \supseteq \xi_1^{-1}(I_{\varepsilon_1}) \cap \dots \cap \xi_M^{-1}(I_{\varepsilon_M})$$
Basta mostrare che $\forall k = 1 \dots M \quad x_n \in \xi_k^{-1}(I_{\varepsilon_k})$ <u>definitivamente</u>
ovvero $\quad \xi_k(x_n) \in (-\varepsilon_k, \varepsilon_k)$ definitivamente in n

$\forall k$: $\quad |\xi_k(x_n)| < \varepsilon_k$ def in n.

vero perché $\quad \xi_k(x_n) \to 0$ per $n \to +\infty$ $\square$

Sia E Banach, E^* è Banach, E^{**} è Banach.

$$\left(\|\xi\|_* = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\xi(x)| \right)$$

Oss $E \subseteq E^{**}$ (a meno di isomorfismo)

$$E \hookrightarrow E^{**} \qquad E^* \xrightarrow{\lambda_x} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \lambda_x \qquad \xi \longmapsto \xi(x)$$

$$\lambda_x(\xi) = \xi(x).$$

$\xi(x)$ è lineare e continuo in x

ma è anche lineare e continuo rispetto a ξ

$\hookrightarrow$ dim Fissato x

$\xi \mapsto \xi(x)$ è lineare rispetto a ξ

$$(\alpha \xi + \beta \eta)(x) = \alpha \xi(x) + \beta \eta(x)$$

per definizione

$\xi \mapsto \xi(x)$ è continuo rispetto a $\|\cdot\|_*$

$$\xi_n \to \xi \overset{?}{\Rightarrow} \xi_n(x) \to \xi(x)$$

$$|\xi_n(x) - \xi(x)| = |(\xi_n - \xi)(x)| \leq \underbrace{\|\xi_n - \xi\|_*}_{\to 0} \cdot \|x\|$$

Se λ è biettiva diremo che E è riflessivo.

Es $E = L^p(\Omega)$ Ω limitato.

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int |u(x)|^p \right)^{1/p}$$

Disuguaglianza di Hölder:

$u \in L^p$ $v \in L^q$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|u \cdot v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^q}$$

$$u \longmapsto \int u \cdot v$$

Se $v \in L^q$ $\xi_v(u) = \int u \cdot v$. ξ_v è lineare

$$\|\xi_v\|_* = \sup_{\|u\|_{L^p} \leq 1} \left| \int u \cdot v \right| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q} \leq \|v\|_{L^q} < +\infty$$

$1 \leq p < +\infty$, $\xi_v \in (L^p)^*$

$L^q \cong (L^p)^*$ [NON ABBIAMO PERÒ DIMOSTRATO: che ogni $\xi \in (L^p)^*$ è della forma $\xi = \xi_v$ per qualche $v \in L^q$]

<u>Nota</u>: $p=2$, $q=2$ $\quad L^2$ è in effetti uno spazio di Hilbert, $(u,v) = \int u \cdot v$

$$(L^2)^* = L^2.$$

$(L^1)^* = L^\infty$ ma $(L^\infty)^* \not\supseteq L^1$

L^p è riflessivo se $p \in (1, +\infty)$

Su E ho la topologia debole $\sigma = \sigma(E, E^*)$

$x_k \rightharpoonup x \iff \xi(x_k) \to \xi(x) \quad \forall \xi \in E^*$

$(x_k \xrightarrow{\sigma} x)$

Su E^* ho la topologia debole $\sigma = \sigma(E^*, E^{**})$
ma anche una topologia debole-$*$ $\sigma = \sigma(E^*, E)$

$\xi_n \xrightarrow{*} \xi$

debole = debole-$*$ se E è riflessivo.

BANACH-ALAOGLU (versione sequenziale)

<u>Teo</u> Sia E uno spazio di Banach separabile
allora se $\xi_n \in E^*$ e $\|\xi_n\|_* \leq 1$

$$\exists\, \xi \in E^* \quad \exists\, n_k \; : \quad \xi_{n_k} \xrightarrow{*} \xi$$

in $\sigma(E^*, E)$

<u>Nota 1</u> L^p e $W^{1,p}$ sono separabili per $p \in [1, \infty)$
per $p \in (1, \infty)$ L^p è un duale ed è riflessivo $\Rightarrow$ se $u_n \in L^p$ $\|u_n\|_{L^p} \leq C$

allora $\exists$ estratta convergente debole.

dim E separabile: $\exists\, x_n \in E$ t.c. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in E.

ξ_k successione in E^*

$\|\xi_k\|_* \leq 1$.

Fissato n $\qquad |\xi_k(x_n)| \leq \|\xi_k\|_* \cdot \|x_n\| \leq \|x_n\|$

$\Rightarrow \xi_k(x_n)$ è limitata $\Rightarrow$ ha una estratta convergente.

$\xi_k(x_1)$ ha una estratta $\quad \xi_{k_j^1}(x_1) \to \xi(x_1)$

$\xi_{k_j^1}(x_2)$ ha una estratta $\quad \xi_{k_j^2}(x_2) \to \xi(x_2)$

$\vdots$

$\xi_{k_j^n}(x_n) \to \xi(x_n)$

$\vdots$

$\forall n$: $\boxed{\xi_{k_j^j}(x_n) \xrightarrow[j]{} \xi(x_n)}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & k_1^1 & k_2^1 & k_3^1 & \cdots \\
 & k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & \cdots \\
 & k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 & \cdots \\
n: & k_1^n & k_2^n & k_3^n & \cdots \quad k_n^n
\end{array}$$

k_j^j è "definitivamente" una sottosucc. di k_j^n $\forall n$.

Poniamo $\xi_j = \xi_{k_j^j}$ $\qquad \xi_j(x_n) \xrightarrow{j\to\infty} \xi(x_n)$. $\forall n \in \mathbb{N}$

Abbiamo trovato:

$$\xi : \{x_n\} \subseteq E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\|\xi_j\|_* \leq 1 \Rightarrow \xi_j$ è 1-Lipschitz su E

anche ξ è 1-Lipschitz su $\{x_n\}$?

$$|\xi(x_n) - \xi(x_m)| = \left|\lim_j \xi_j(x_n) - \lim_j \xi_j(x_m)\right|$$

$$= \left|\lim_j \xi_j(x_n - x_m)\right| \leq \limsup_j |\xi_j(x_n - x_m)|$$

$$\leq \limsup_j \|\xi_j\|_* \cdot \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_m\| \qquad \|\xi_j\|_* \leq 1.$$

$\Rightarrow \xi$ è 1-lip. su $\{x_n\}$

$\Rightarrow \xi$ si estende per continuità a tutto $E = \overline{\{x_n\}}$

e ξ è 1-lip su tutto E

$\Downarrow$

$\xi \in E^*$ $\qquad$ ξ è continuo

- Mi serve verificare che $\xi(x) = \lim_j \xi_j(x) \quad \forall x \in E$

Fissato $x \in E$ $\quad \exists\, x_{n_k} \to x \quad x_k = x_{n_k}$

$$|\xi(x) - \xi_j(x)| = \underbrace{|\xi(x) - \xi(x_k)|}_{\le \|x - x_k\|} + \underbrace{|\xi(x_k) - \xi_j(x_k)|}_{\downarrow j\to\infty \; 0} + \underbrace{|\xi_j(x_k) - \xi_j(x)|}_{\le \|x_k - x\|}$$

$$\limsup_j |\xi(x) - \xi_j(x)| \le 2\|x - x_k\| \to 0 \quad k \to \infty$$

$|\xi(x) - \xi_j(x)| \to 0$ ovvero $\xi_j(x) \to \xi(x)$ $\forall x \in E$

ξ è lineare?

$$\xi(\alpha x + \beta y) = \lim_j \xi_j(\alpha x + \beta y) = \lim_j (\alpha \underbrace{\xi_j(x)}_{\downarrow \xi(x)} + \beta \underbrace{\xi_j(y)}_{\downarrow \xi(y)})$$

$$= \alpha \xi(x) + \beta \xi(y)$$

$\xi \in E^*$!

Lemma.

$\xi_j \xrightarrow{*} \xi$? $\Leftarrow$ $\xi_j(x) \to \xi(x) \quad \forall x \in E$ $\qquad \square$

$\sigma(E^*, E)$

<u>Nota</u> Se E è separabile, $B^* = \{\xi \in E^*, \|\xi\|_* \le 1\}$

$\{x_n\}$ denso in E

B^* con la topologia $\sigma(E^*, E)$ (debole $*$)

è metrizzabile:

$$d(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi(x_k) - \eta(x_k)|}{1 + |\xi(x_k) - \eta(x_k)|}$$

è una distanza su B^* con topologia indotta $\sigma(E^*, E)$

compatto = sequenzialmente compatto.