Γ-CONVERGENZA

PROP (STABILITÀ PER PERTURBAZIONI CONTINUE)

$f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f$ in X e $g : X \to \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow$ $f_n + g \xrightarrow[\Gamma]{} f+g$

PIÙ IN GENERALE SE $g_n : X \to \mathbb{R}$ SONO CONTINUE E $g_n \to g$ UNIFOR.

$\Rightarrow$ $f_n + g_n \xrightarrow[\Gamma]{} f+g$.

DEF: $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\Gamma\text{-}\liminf_n f_n = \inf_{x_n \to x} \liminf_n f_n(x_n)$$

ESISTONO SEMPRE

$$\Gamma\text{-}\limsup_n f_n = \inf_{x_n \to x} \limsup_n f_n(x_n)$$

PROP: ① $\Gamma\text{-}\liminf_n f_n \leq \Gamma\text{-}\limsup_n$

② $\Gamma\text{-}\liminf_n f_n = \Gamma\text{-}\limsup_n f_n = f \iff f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f$.

DIM: ① OVVIO DALLA DEF.

② $f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f \implies f \leq \liminf_n f_n(x_n) \ \forall x_n \to x \implies f \leq \Gamma\text{-}\liminf_n f_n$

$\exists x_n : f \geq \limsup_n f_n(x_n) \geq \Gamma\text{-}\limsup \overset{①}{\implies} f = \Gamma\text{-}\liminf_n f = \Gamma\text{-}\limsup_n$

SUPP. ORA $\Gamma\text{-}\liminf_n f_n = \Gamma\text{-}\limsup_n f_n = f$

ⓐ $f \leq \inf_n f_n(x_n) \quad \forall x_n \to x$ (DIS. DEL LIMINF.)

ⓑ DATO x CERCO $x_n \to x$ T.C. $f(x) \geq \limsup_n f_n(x_n)$.

PROCED. DIAGONALE

$\forall k \in \mathbb{N} \; \exists x_{n,k}$ T.C. $f(x) \geq \limsup_n f_n(x_{n,k}) - \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \exists n_k$ T.C. $f(x) \geq f_n(x_{n,k}) - \frac{2}{k} \quad \forall n \geq n_k$

IN PART. $f(x) \geq f_n(x_{n_k}) - \frac{2}{k}$,

DEF. $x_n = x_{n,k} \quad \forall n \in [n_k, n_{k+1})$

$\Rightarrow f(x) \geq f_n(x_n) - \frac{2}{k} \quad \forall n \in [n_k, n_{k+1})$

$\Rightarrow f(x) \geq \limsup_n f_n(x_n)$.

PROP: GLI inf NELLA DEF. DI $\Gamma\text{-}\liminf_n$ E $\Gamma\text{-}\limsup_n$ SONO IN REALTÀ DEI MINIMI, CIOÈ $\exists\, x_n^{\pm} \to x$ T.C.

$$\begin{cases} \Gamma\text{-}\liminf_n f_n = \liminf_n f_n(x_n^-) \\ \Gamma\text{-}\limsup_n f_n = \limsup_n f_n(x_n^+) \end{cases}$$

PROP: ANCHE IL $\Gamma\text{-}\liminf_n f_n$ E $\Gamma\text{-}\limsup_n f_n$ SONO S.C.I. SU X.

OSS: (CLASSE DENSA PER $\Gamma\text{-}\limsup$)

PER MOSTRARE CHE $\Gamma\text{-}\limsup_n f_n \leq f$ IN X
È SUFF. VEDERE CHE LA DISUGUAGLIANZA VALE $\forall x \in C \subseteq X$,
DOVE C È UN INSIEME "DENSO PER f", CIOÈ $\forall x \in X\ \exists\, x_n \to x$ T.C. $x_n \in C$ E $f(x_n) \to f(x)$.

INFATTI, POSTO $f_\infty = \Gamma\text{-}\limsup_n f_n$, $\forall x \in X$ POSSO SCRIVERE

$$f_\infty(x) \underset{\text{s.c.i.}}{\leq} \liminf_n f_\infty(x_n) = \liminf_n f(x_n) = f(x)$$

LEMMA: $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. $f_\infty = \Gamma\text{-}\liminf_n f_n$.

1. $\forall A \subseteq X$ APERTO, $\inf_A f_\infty \geq \liminf_n \inf_A f_n$

2. $\forall K \subset X$ COMPATTO, $\inf_K f_\infty \leq \liminf_n \inf_K f_n$.

DIM 1. Sia $x \in A$ e $x_n \to x$ T.C. $f_\infty(x) = \liminf_n f_n(x_n)$.

$x_n \in A$ DEF. IN n $\Rightarrow$ $f_\infty(x) = \liminf_n f_n(x_n) \geq \liminf_n \inf_A f_n$.

(2) $I_n = \inf_K f_n$. Sia n_k t.c. $\liminf_n I_n = \lim_k I_{n_k}$.

Sia x_{n_k} t.c. $f_{n_k}(x_{n_k}) \leq I_{n_k} + \frac{1}{n_k}$.

A MENO DI SOTTOSUCC. $x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x_\infty \in K$.

$$\inf_K f_\infty \leq f_\infty(x_\infty) \leq \liminf_k f_{n_k}(x_{n_k}) \leq \liminf_k \left(I_{n_k} + \frac{1}{n_k} \right) = \lim_k I_{n_k}$$

$$= \liminf_n I_n$$

DEF: f_n È UNA SUCC. EQUICOERCIVA SE $\exists K \subseteq X$ COMPATTO T.C.

$$\inf_X f_n = \inf_K f_n \quad \forall n.$$

DEF: $x_n \in X$ SONO QUASIMINIMI PER f_n SE $\lim_n \left[f_n(x_n) - \inf_X f_n \right] = 0$.

TEOREMA (CONVERGENZA DEI MINIMI)

SIA $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ UNA SUCC. EQUICOERCIVA

E SIA $f_\infty = \Gamma\text{-}\liminf_n f_n$. ALLORA:

① f_∞ HA MINIMO IN X E $\min_K f_\infty = \min_X f_\infty$.

② $\min_K f_\infty = \liminf_n \inf_K f_n = \liminf_n \inf_X f_n$.

SE INOLTRE $f_n \xrightarrow{\Gamma} f_\infty$, ALLORA:

③ $\min_X f_\infty = \lim_n \inf_X f_n$

④ $x_n \in K$ QUASIMINIMI DI f_n, $x_n \xrightarrow{K} x \implies x$ MINIMO PER f_∞.

DIM. (1) $\forall x \quad f_\infty(x) = \liminf_n f_n(x_n) \geq \liminf_n \inf_X f_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EQUICOERC.}}}{=} \liminf_n \inf_K f_n$

$\Rightarrow \inf_X f_\infty \geq \liminf_n \inf_K f_n \geq \inf_K f_\infty \underset{\substack{\uparrow \\ f_\infty \text{ S.C.I.}}}{=} \min_K f_\infty$

$\Rightarrow f_\infty$ HA MINIMO IN X, ASSUNTO IN K.

(2) SIA $x \in K$ UN MINIMO DI f_∞ IN X. SIA $x_n \to x$ T.C.

$$\min_K f_\infty = f_\infty(x) = \liminf_n f_n(x_n) \geq \liminf_n \inf_X f_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EQUICOERC.}}}{=} \liminf_n \inf_K f_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LEMMA}}}{\geq} \min_K f_\infty$$

$\Rightarrow$ LE DIS. SONO TUTTE UGUAGLIANZE.

SUPP. ORA CHE $f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f_\infty$.

3 $\quad \min_K f_\infty = \min_X f_\infty \leq \liminf_n \inf_X f_n$.

SIA x UN MINIMO DI f_∞ E SIA x_n T.C. $f_n(x_n) \to f_\infty(x)$

[RECOVERY SEQUENCE DEL Γ- limite]

$$\min_X f_\infty \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{=} \liminf_n \inf_X f_n \leq \liminf_n f_n(x_n) = f_\infty(x) = \min_X f_\infty$$

$\Rightarrow$ SONO TUTTE UGUAGLIANZE.

4 $\quad x_n \in K, \; x_{n_k} \to x \in K$.

$$f_\infty(x) \leq \liminf_k f_{n_k}(x_{n_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{QUASIMINIMI}}}{=} \liminf_k \inf_X f_{n_k} \underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{=} \min_X f_\infty .$$