

Analisi Matematica A-B  
Prova scritta parziale n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24  
Università di Pisa

16 dicembre 2023

1. Sia  $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  e sia  $f : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$  la funzione definita da  $f(z) = e^z$ .

- (a) Mostrare che  $f$  è iniettiva;
- (b) mostrare che il punto  $w = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  appartiene all'immagine di  $f$  e calcolare  $f^{-1}(w)$ .

2. (a) Determinare tutti gli  $x \in \mathbb{R}$  per i quali la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2 - 1)^k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$  converge.

- (b) Calcolare il limite di  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \frac{(x^2 - 1)^k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$  per  $n \rightarrow \infty$ , al variare di  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Si consideri la successione  $x_n$  definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{x_n}{x_n^2 + 1} \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare se la successione ammette limite e, nel caso, calcolarlo;

(b) determinare se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  converge;

(c) determinare se la serie converge assolutamente.