ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 41 – 17.1.2024

Esercizio $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$(*) \quad (1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} t^n + o(t^n)$$

$$(\cos x)^{\sin x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\sin x} \leftarrow \text{NON POSSO PORRE } \alpha = \sin x$$

ma $\quad = e^{\sin x \cdot \ln \cos x} = \dots \qquad \binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!} = (-1)^k$

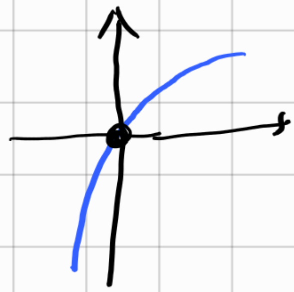
$$f'(x) = (1+x^2)^{-1} \underset{(*)}{=} \boxed{1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n}} + o(x^{2n})$$

$$\left(\text{Anche perché } \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}\right)$$

$$f(x) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f(0)} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Esercizio Sviluppare $(\cos x)^{\sin x}$ all'ordine 5 in $x_0 = 0$.

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln \cos x}$$



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = \boxed{t} - \boxed{\frac{t^2}{2}} + o(t^2)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}_{t}\Big)$$

$$= \boxed{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} - \frac{1}{2}\boxed{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(\sin x)\cdot \ln\cos x = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= -\frac{x^3}{2} + \cancel{\boxed{\frac{x^5}{12}}} - \cancel{\boxed{\frac{x^5}{12}}} + o(x^5)$$

$$= -\frac{x^3}{2} + o(x^5) = t$$

serve?

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) = o(t^{5/3})$$

$$(\cos x)^{\sin x} = 1 + \left(-\frac{x^3}{2} + o(x^5)\right) + \cancel{\frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{2} + o(x^5)\right)^2 + o(x^6)}$$

$$= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5) \qquad (x^6 = o(x^5))$$

Polinomio di Taylor di ordine 5

Mi basta sapere che $\frac{t^2}{2} + o(t^2) = o(t^{\frac{5}{3}})$

$$t \sim -\frac{x^3}{2} \qquad o(x^5)$$

$$e^t = 1 + t + o(t^{2-\varepsilon})$$

NUOVA NOTAZIONE : $e^t = 1 + t + O(t^2)$ #

O - grande: $f \in O(g)$ per $x \to x_0$

se $\frac{f}{g}$ limitata in un intorno di x_0

ovvero $\limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < +\infty$

Formula di Taylor con O-grande: $f(x) = P_n(x) + O(x^{n+1})$
se f è di classe C^{n+1}

Nell'esercizio ④ $e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^5)} = 1 - \frac{x^3}{2} + \underline{o(x^5)} + O(x^6)$

$= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$

per $x \to 0$ $O(x^\alpha) \overset{\subseteq}{=} o(x^{\alpha-\varepsilon})$

$o(x^{\alpha+\varepsilon}) \subseteq O(x^{\alpha+\varepsilon}) \subseteq o(x^\alpha) \subseteq O(x^\alpha) \subseteq o(x^{\alpha-\varepsilon})$

<u>Altre regole</u>

	EURISTICA
$o(o(f)) = o(f)$	$A < B < C$
$O(O(f)) = O(f)$	$A \leq B \leq C$
$O(o(f)) = o(f)$	$A \leq B < C$
$o(O(f)) = o(f)$.	$A < B \leq C$

$\int$

Esempio (come usare Taylor per determinare il carattere di una serie).

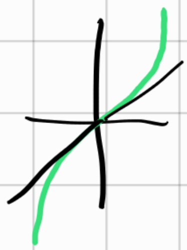
$$\sum_k \sqrt{k}\left(k\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{k} - \cos\frac{1}{k}\right) = \sum_k a_k$$

Idea 1. vorrei confrontare con $\sum \frac{1}{k^\alpha}$

Idea 2. Se pongo $x = \frac{1}{k}$ per $k \to +\infty$ $x \to 0^+$.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,x - \cos x\right) \overset{?}{\sim} x^\alpha \qquad \alpha = ?$$

Per $x \to 0$:



$$\mathrm{tg}\,x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\boxed{\cancel{1} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{5}{6}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{5}{6}x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

$$\sim \frac{5}{6}x^{3/2} \quad \text{per } x \to 0$$

$$a_k = f\left(\frac{1}{k}\right) \sim \boxed{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{k^{3/2}}} \quad \text{per } k \to +\infty$$

Posso applicare il confronto asintotico? Solo se a_k è a termini positivi.
o almeno definitivamente positivi.

Lo è perché $a_k = \frac{5}{6}k^{-3/2} + o(k^{-3/2})$

$$= \underbrace{\boxed{k^{-3/2}}}_{>0}\cdot\left[\frac{5}{6} + o(1)\right]$$

$\frac{5}{6} + o(1)$ è definitivamente positivo per il teorema della permanenza del segno.
per $k \to +\infty$

<u>ok</u> la serie ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ che è convergente.

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x\sqrt{x}} \sim \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} \qquad \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{x\sqrt{x}}{2} + o(x\sqrt{x})$$

per $x \to 0$

$x \sim x + x^2$

$x - (x+x^2) = x^2$

$x \sim x + x^3$

ma $x - (x+x^3) \sim x^3$

⚠ Se $f = g - h + \ell$ $\quad h \sim g$

Non posso cancellare $g - h$

<u>Esercizio</u> (come primo ma a segni alterni)

Determinare il carattere di $\sum_k (-1)^k \cdot k \left(k \operatorname{tg} \frac{1}{k} - \cos \frac{1}{k} \right)$

Vorrei applicare Leibniz.

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \operatorname{tg} x - \cos x \right) = \frac{5}{6} x + o(x)$$

$$\sum (-1)^k a_k \qquad a_k = f\left(\frac{1}{k}\right)$$

- a_k è definitivamente positiva

(come prima)

- $a_k \to 0$ sì perché $a_k \sim \frac{5}{6}\frac{1}{k}$
- a_k è definitivamente decrescente ???

$\cos(x+o(x)) - \cosh(x+o(x))$

$= \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$= -x^2 + o(x^2)$

$\left(e^{\sqrt{x}} - 5^{\sqrt{x}}\right)^4$ $\qquad 5^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln 5} = 1 + \ln 5\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$

$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$

$\left(\left(1-\ln 5\right)\sqrt{x} + o(\sqrt{x})\right)^4 = (1-\ln 5)^4 x^2 + o(x^2)$