Forme differenziali

E. Paolini

26 ottobre 2014

1 SPAZIO DUALE

Se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione n, chiamiamo *spazio duale di V* che indichiamo con $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari continue definite su V a valori in $\mathbb{R}$.

Se $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}$ è una base di V ogni vettore v si può scrivere nella forma

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e_j}$$

(i coefficienti v_j vengono chiamate coordinate del vettore $\mathbf{v}$ nella base $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}$).

In corrispondenza di $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}$ si può dunque definire una base dello spazio duale $\omega_1, \dots, \omega_n$ ponendo

$$\omega_i(\mathbf{v}) = v_i$$

se $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e_i}$. Ovvero:

$$\omega_i(\mathbf{e_j}) = \delta_{ij}$$

dove δ_{ij} vale 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$ (delta di Kronecker).

Se sullo spazio vettoriale V mettiamo un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ ogni elemento $\mathbf{v} \in V$ ci fornisce una applicazione lineare $\omega \in V^*$ definita da $\omega(\mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Visto che questa corrispondenza tra vettori dello spazio V e vettori dello spazio V^* è iniettiva, e visto che V e V^* hanno la stessa dimensione, ogni elemento di V^* può essere rappresentato in questo modo.

2 FORME DIFFERENZIALI LINEARI

Consideriamo ora un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e definiamo $\Lambda^1(\Omega)$ (in certi testi $\Omega^1(\Omega)$) lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\omega \colon \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$. Queste funzioni si chiamano *forme differenziali lineari* o anche 1-*forme differenziali*.

Gli elementi di $\Lambda^1(\Omega)$ sono quindi delle funzioni ω che ad ogni punto del dominio restituiscono una applicazione lineare: $\omega(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\omega(x)(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$. Per distinguere le due variabili da cui dipende ω si usano a volte delle notazioni alternative, come ad esempio le seguenti:

$$\omega(x)(\mathbf{v}) = \omega_x(\mathbf{v}) = \omega(x)[\mathbf{v}].$$

Rimarchiamo il fatto che $\omega_x(\mathbf{v})$ dipende da $\mathbf{v}$ in modo lineare, mentre in generale la dipendenza da x potrebbe non essere lineare.

L'esempio più importante di *forma differenziale* è il differenziale di una funzione. Consideriamo una funzione differenziabile $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dalla definizione di differenziabilità sappiamo che in corrispondenza di ogni punto $x \in \Omega$ esiste una applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che soddisfa la relazione:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(\mathbf{x} - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

La mappa L può essere denotata in diversi modi:

$$L(\mathbf{v}) = Df(x_0)\mathbf{v} = (\nabla f(x_0), \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\, v_k = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(\mathbf{v}).$$

Le diverse notazioni rappresentano modi leggermente diversi per rappresentare lo stesso oggetto: Df è la matrice $1 \times n$ (vettore riga) che rappresenta l'applicazione lineare L nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^n$; il vettore ∇f è quel vettore (vettore colonna) che rappresenta l'applicazione lineare L tramite il prodotto scalare. Nell'ultima notazione df rappresenta invece l'applicazione lineare stessa ed è quindi proprio una forma differenziale lineare, $df \in \Lambda^1(\Omega)$.

Consideriamo ora la funzione $x_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ che al punto $x \in \Omega$ associa la sua k-esima coordinata: x_k. Osserviamo che facendo il differenziale dx_k della funzione x_k in qualunque punto $x \in \mathbb{R}^n$, si ottiene esattamente l'elemento ω_k della base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$. Infatti:

$$dx_k(\mathbf{e_j}) = \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{kj}.$$

In particolare $dx_k(\mathbf{v}) = v_k$ se v_k sono le coordinate di $\mathbf{v}$ nella base canonica.

Dunque ogni forma differenziale $\omega \in \Lambda^1(\Omega)$ può essere scritta nel seguente modo:

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) dx_k. \tag{1}$$

In particolare il differenziale di una funzione si può scrivere così:

$$df_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

in quanto $df_x(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ e $v_k = dx_k(v)$.

Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ ci permette di mettere in corrispondenza le forme differeniali lineari con i *campi vettoriali*. Un campo vettoriale è una funzione $\xi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Al campo ξ possiamo associare una forma differenziale ω definita come segue:

$$\omega_x(\mathbf{v}) = (\xi(x), \mathbf{v}).$$

Se le componenti di ω sono le funzioni a_k date dalla (1) le stesse funzioni sono le coordinate di ξ nella base canonica di $\mathbb{R}^n$:

$$\xi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \mathbf{e_k}.$$

3 INTEGRALE DI LINEA DI UNA FORMA DIFFERENZIALE

Data $\omega \in \Lambda^1(\Omega)$ e data una curva regolare a tratti $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$, definiamo l'integrale di ω lungo γ tramite la formula:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt.$$

Osserviamo immediatamente che se $p\colon [c,d] \to [a,b]$ è una riparametrizzazione regolare, crescente, posto $\eta(\tau) = \gamma(p(\tau))$ si ha (tramite il cambio di variabili $t = p(\tau)$)

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt = \int_c^d \omega_{\gamma(p(\tau))}(\gamma'(p(\tau))\,p'(\tau)\,d\tau \\ &= \int_c^d \omega_{\eta(\tau)}((\gamma \circ p)'(\tau))\,d\tau = \int_\eta \omega.\end{aligned}$$

Dunque l'integrale di una forma differenziale su due curve equivalenti e concordi, è lo stesso. Se invece le due curve hanno orientazione opposta cioè se $p'(t) < 0$, con il cambio di variabili gli estremi di integrazione si scambiano, in quanto $p(c) = b$ e $p(d) = a$, dunque si otterrà $\int_\eta \omega = -\int_\gamma \omega$.

Dunque, a differenza dell'integrale curvilineo, l'integrale di una forma differenziale dipende dall'orientazione della curva.

Se la forma differenziale ω è associata al campo vettoriale ξ si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (\xi, \gamma'(t))\,dt = \int_\gamma (\xi, \tau)\,ds$$

dove $\tau(\gamma(t)) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ è il versore tangente alla curva γ con verso concorde all'orientazione. In particolare quando la curva γ è chiusa, l'integrale di linea si chiama anche *circuitazione* del campo ξ lungo la curva γ.

Osserviamo che se $\omega = df$ è un differenziale, si ha[1]

$$\int_\gamma df = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

cioè l'integrale non dipende neanche dalla curva, ma solo dai suoi estremi. Se poi la curva γ è chiusa, si ha $\int_\gamma df = 0$.

1 Ricordiamo la derivata della funzione composta:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

Esempio 3.1. Consideriamo la forma differenziale $\omega = y^2\,dx$ in $\mathbb{R}^2$. Sia γ la curva che descrive il perimetro del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ in senso antiorario. Calcoliamo $\int_\gamma \omega$. Visto che l'integrale è additivo rispetto al dominio, è sempre possibile spezzare una curva in più componenti. In particolare in questo caso il perimetro del quadrato può essere spezzato nei quattro lati che lo compongono. Questo evita anche il problema di trovare una parametrizzazione di classe $\mathcal{C}^1$ che attraversi i vertici del quadrato.

Dunque $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega$ dove per $t \in [0,1]$ poniamo $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\gamma_2(t) = (1,t)$, $\gamma_3(t) = (1-t,1)$, $\gamma_4(t) = (0,1-t)$. Si ha allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 0^2\,dt = 0 \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 t^2 \cdot 0\,dt = 0$$
$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^1 1^2(-1)\,dt = -1 \int_{\gamma_4} \omega = \int_0^1 (1-t)^2 \cdot 0\,dt = 0$$

e quindi $\int_\gamma \omega = -1$.

Esempio 3.2. Consideriamo la forma differenziale $\omega = 2x\,dx + 2y\,dy$ e la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ per $t \in [0,1]$. Si ha allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int_\gamma 2x\,dx + 2y\,dy &= \int_0^1 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 2t + 2t^2 \cdot 2t\,dt = [t^2 + t^4]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

Osserviamo ora che posto $f(x,y) = x^2 + y^2$ si ha $df = 2x\,dx + 2y\,dy = \omega$. Dunque si può semplificare il calcolo sapendo che:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,1) - f(0,0) = 2.$$

4 FORME CHIUSE E FORME ESATTE

Una forma differenziale ω si dice essere *esatta* se esiste una funzione f (chiamata *primitiva*) tale che $df = \omega$. Abbiamo visto nel paragrafo precedente che l'integrale di una forma differenziale esatta dipende solo dagli estremi della curva (e dall'orientazione) e non dal percorso fatto. Nel linguaggio dei campi vettoriali quando si ha $\xi = \nabla f$ si dice che il campo ξ è *conservativo* e f è un *potenziale* di ξ.

Visto che trovare un potenziale di una forma differenziale semplifica il calcolo degli integrali di linea, è importante avere delle condizioni per identificare le forme esatte.

Osserviamo che se $\omega = df$ è una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$:

$$\omega = \sum_{k=1}^n a_k dx_k$$

si avrà $a_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ con f di classe C^2, dunque per il teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste, si avrà:

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_k}.$$

Diremo che la forma differenziale $\omega = \sum a_k dx_k$ è *chiusa*, se soddisfa le equazioni:

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_k}$$

per ogni $j = 1, \ldots, n$ e ogni $k = 1, \ldots, n$.

Per l'osservazione che abbiamo fatto, sappiamo che vale il seguente.

Teorema 4.1. *Se ω è una forma esatta, di classe C^1, allora ω è chiusa.*

Esempio 4.2. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \tag{2}$$

che risulta essere definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e consideriamo la circonferenza $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x(t) = R\cos t$, $y(t) = R\sin t$ al variare di $t \in [0, 2\pi]$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Possiamo affermare quindi che ω non è esatta, in quanto c'è almeno una curva chiusa su cui l'integrale non è zero. Controlliamo se la forma è chiusa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} &= \frac{-(x^2+y^2) + y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} &= \frac{x^2+y^2 - x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

dunque risulta che la forma è chiusa.

Diremo che un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è *connesso per archi* se dati due punti qualunque in Ω esiste una curva di classe $\mathcal{C}^1$ i cui estremi sono i punti dati.

Teorema 4.3. *Se ω è una forma differenziale, continua, definita su un aperto connesso per archi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *ω è esatta;*
2. *$\int_\gamma \omega = 0$ per ogni curva chiusa γ di classe $\mathcal{C}^1$;*
3. *$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega$ se γ e η sono curve di classe $\mathcal{C}^1$ con lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che 1 implica 2 in quanto l'integrale di una forma esatta è la differenza del valore della primitiva nei suoi estremi.

Dimostriamo che 2 implica 3. Siano η e γ curve $\mathcal{C}^1$ con gli stessi estremi. Vogliamo costruire una curva chiusa concatendando η con la curva γ percorsa in senso inverso. A meno di riparametrizzazioni possiamo supporre che entrambe le curve siano parametrizzate sull'intervallo $[0,1]$. Consideriamo una qualunque funzione $p(t)\colon [0,1] \to [0,1]$ che sia: strettamente crescente, di classe $\mathcal{C}^1$ e che abbia la proprietà: $p'(0) = 0$, $p'(1) = 0$ (ad esempio $p(t) = 3t^2 - 2t^3$). Allora la curva α definita su $[0,2]$ in questo modo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \eta(p(t)) & \text{se } t \leq 1 \\ \gamma(p(2-t)) & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

risulta essere una curva chiusa di classe $\mathcal{C}^1$ (osserviamo però che α in generale non sarà una curva regolare perché la derivata si annulla in 0, 1 e 2). Essendo poi

$$\int_\alpha \omega = \int_\eta \omega - \int_\gamma \omega$$

si ottiene l'implicazione $2 \Rightarrow 3$.

L'implicazione $3 \Rightarrow 1$ è quella interessante. Si tratta infatti di costruire una primitiva $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Scelto un punto arbitrario $x_0 \in \Omega$ definiamo:

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

dove γ_x è una qualunque curva che congiune il punto x_0 con il punto x. Per la proprietà 3 sappiamo che qualunque curva si scelga il risultato ottenuto è lo stesso, quindi f è ben definita.

Si tratta ora di verificare che $df = \omega$ ovvero che per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si abbia:

$$\omega_x(v) = df_x(v).$$

Ricordiamo che

$$df_x(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

Consideriamo quindi la quantità:

$$f(x+hv) - f(x) = \int_{\gamma_{x+hv}} \omega - \int_{\gamma_x} \omega.$$

Scegliendo una curva γ_x qualunque che congiunge x_0 a x e scegliendo come γ_{x+hv} la curva che percorre γ_x da x_0 a x e poi percorre il segmento[2]

$$\gamma(t) = x + tv, \qquad t \in [0,h]$$

da x a $x + hv$, si ottiene:

$$f(x+hv) - f(x) = \int_\gamma \omega = \int_0^h \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt = \int_0^h \omega_{x+tv}(v)\, dt.$$

2 Possiamo certamente supporre che h sia sufficientemente piccolo in modo tale che la palla centrata in x di raggio $h|v|$ sia contenuta in Ω (in quanto Ω è aperto) e quindi il segmento sia interamente contenuto in Ω.

Visto che $\omega_x(v)$ è una funzione continua nella variabile x, possiamo applicare il teorema della media integrale per ottenere che esiste un $\bar{t} \in [0,h]$ tale che

$$\int_0^h \omega_{x+tv}(v)\, dt = h\omega_{x+\bar{t}v}(v).$$

Osserviamo ora, di nuovo per la continuità di ω, che per $h \to 0$ anche $\bar{t} \to 0$ e quindi $\omega_{x+\bar{t}v}(v) \to \omega_x(v)$. Mettendo assieme i risultati precedenti si ottiene quindi

$$df_x(v) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \omega_{x+\bar{t}v}(v) = \omega_x(v)$$

che è il risultato desiderato. □

Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^2$ che può essere scritto nella forma

$$E = \{(x,y)\colon x \in [a,b],\ \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

dove $\phi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue con $\phi(x) \le \psi(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, si dice essere un *dominio normale rispetto all'asse delle x*. L'analoga definizione con le variabili x e y scambiate ci dà i domini normali rispetto all'asse delle y.

Teorema 4.4 (formule di Green)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto all'asse delle x delimitato da due funzioni $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ di classe C^1. Allora, se f è una funzione continua su $\overline{E}$ di classe C^1 in E, si ha:*

$$-\int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial E} f(x,y)\, dx$$

dove l'integrale sul lato destro dell'equazione si intende come la somma degli integrali della forma differenziale $f(x,y)\,dx$ sulle quattro curve regolari che percorrono la frontiera di E in senso antiorario.

Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio normale rispetto all'asse delle y si ha invece:

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial E} f(x,y)\, dy.$$

Dimostrazione. Essendo E un dominio normale rispetto all'asse delle x, le formule di riduzione per gli integrali doppi, ci permettono di scrivere:

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \right) dx.$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci permette di affermare che

$$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy = f(x,\phi(x)) - f(x,\psi(x))$$

da cui

$$-\int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = -\int_a^b f(x,\phi(x))\, dx + \int_a^b f(x,\psi(x))\, dx. \tag{3}$$

La frontiera ∂E è percorsa dalle seguenti quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t,\psi(t)) & t &\in [a,b] \\
\gamma_2(t) &= (b,t) & t &\in [\psi(b),\phi(b)] \\
\gamma_3(t) &= (t,\phi(t)) & t &\in [a,b] \\
\gamma_4(t) &= (a,t) & t &\in [\psi(a),\phi(a)]
\end{aligned}$$

dove le curve γ_3 e γ_4 sono percorse in senso inverso. Si ha dunque

$$\int_{\partial E} f\,dx = \int_{\gamma_1} f\,dx + \int_{\gamma_2} f\,dx - \int_{\gamma_3} f\,dx - \int_{\gamma_4} f\,dx.$$

Osserviamo che sulle curve γ_2 e γ_4 l'integrale è nullo, in quanto la curva ha coordinata x costante. Sulle altre due curve si ha invece $dx = dt$, cosicché:

$$\int_{\partial E} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(t,\psi(t))\,dt - \int_a^b f(t,\phi(t))\,dt. \tag{4}$$

Mettendo assieme (3) e (4) si ottiene la tesi del teorema.

La seconda parte del teorema si può dimostra in maniera analoga. Oppure, in alternativa, si può osservare che scambiando le variabili x e y, l'integrale su E rimane invariato, ma su ∂E viene invertita l'orientazione e quindi si ottiene un cambio di segno. □

5 k-forme differenziali

Una *k-forma multilineare alternante* $\lambda\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ è una funzione che associa ad una k-upla di vettori $v_1, \dots, v_k$ uno scalare $\lambda(v_1, \dots, v_k)$ che risulta essere lineare in ogni singola componente v_j e alternante, nel senso che scambiando due vettori v_i, v_j il risultato cambia segno.

Esempio 5.1. Per $n = 3$, $k = 2$ si può definire ad esempio:

$$\lambda(v,w) = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

dove $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. Si può verificare facilmente che $\lambda(v,w)$ è lineare sia rispetto a v che rispetto a w. Inoltre $\lambda(w,v) = -\lambda(v,w)$ e dunque λ è un esempio di 2-forma multilineare alternante (anche detta forma bilineare alternante).

Per $k = 1$ c'è un singolo vettore in ingresso e quindi si ottengono le usuali applicazioni lineari: $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$. Per $k = 0$ la definizione è degenere ma si intende che λ non è una funzione (in quanto viene valutata su 0 vettori) ma rappresenta un qualunque numero reale: $\lambda \in \mathbb{R}$.

In generale, le k-forme multilineari sono univocamente determinate dai valori che assumono su tutte le k-uple di elementi della base canonica. Se inoltre la forma è alternante, risulta univocamente determinata una volta che si assegna il valore su una sola delle diverse permutazioni di k elementi della base canonica.

Per questo le n-forme alternanti in $\mathbb{R}^n$ sono univocamente determinate dal valore assunto sulla base canonica $(\mathbf{e_1}, \dots \mathbf{e_n})$ in quanto ogni scelta di n vettori della base è una permutazione di questa. Si osserva in effetti, che le proprietà delle n-forme alternanti sono le stesse che identificano il determinante quindi le n-forme lineari alternanti su $\mathbb{R}^n$ sono tutte multiple del determinante, e formano uno spazio vettoriale di dimensione 1.

In generale lo spazio vettoriale delle k-forme alternanti su $\mathbb{R}^n$ ha dimensione $\binom{n}{k}$.

Se α è una 1-forma e ω è una k-forma, possiamo definire il loro prodotto esterno mimando lo sviluppo del determinante:

$$(\alpha \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \alpha(v_j) \omega(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{k+1})$$

L'operazione di prodotto esterno ci permette di costruire k-forme moltiplicando tra loro, tramite prodotto esterno, le 1-forme. Il prodotto esterno risulta essere associativo, ma non commutativo. Anzi, se α e β sono 1-forme, si ha $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

Una funzione ω definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ che ad ogni $x \in \Omega$ associa una forma multilineare alternante, si dice essere una k-forma differenziale su Ω. L'insieme delle k-forme differenziali si indica con $\Lambda^k(\Omega)$.

Esempio 5.2. Ricordiamo che nel piano $\mathbb{R}^2$ una base delle 1-forme è data dalle applicazioni lineari dx e dy. Si ha allora:

$$\begin{aligned}(dx \wedge dy)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= dx(\mathbf{v})dy(\mathbf{w}) - dx(\mathbf{w})dy(\mathbf{v}) = v_1 w_2 - w_2 v_1 \\ &= \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e ogni 2-forma in $\mathbb{R}^2$ si scrive come

$$\omega = f(x, y)\, dx \wedge dy.$$

Le 2-forme differenziali sono univocamente determinate una volta assegnato il valore su ogni paio di vettori della base canonica. Lo spazio vettoriale delle 2-forme in $\mathbb{R}^n$ risulta quindi avere dimensione $n(n-1)/2$ in quanto una 2-forma ω risulta univocamente determinata dai valori $\omega(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j})$ con $1 \le i < j \le n$.

Esempio 5.3. Per $n = 3$ lo spazio delle 2-forme multilineari alternanti ha dimensione $n(n-1)/2 = 3 = n$. Dunque le 2-forme possono essere rappresentate tramite vettori di $\mathbb{R}^3$. In effetti se $\xi \in \mathbb{R}^3$ osserviamo che l'applicazione

$$\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\xi, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$$

risulta essere multilineare alternante. Dunque tutte le 2-forme differenziali $\omega \in \Lambda^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ possono essere rappresentate da campi vettoriali $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mediante l'identificazione:

$$\omega_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\xi(x), \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

Andando ad esaminare le coordinate si trova che

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) &= (\xi, \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}) = (\xi, \mathbf{e_3}) = \xi_3 \\ \omega(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) &= (\xi, \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3}) = (\xi, \mathbf{e_1}) = \xi_1 \\ \omega(\mathbf{e_3}, \mathbf{e_1}) &= (\xi, \mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1}) = (\xi, \mathbf{e_2}) = \xi_2\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\omega = \xi_1\, dy \wedge dz + \xi_2\, dz \wedge dx + \xi_3\, dx \wedge dy.$$

Se ω è una k-forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω vogliamo definire il *differenziale* $d\omega$ che sarà una $k+1$ forma differenziale. La definizione può essere data imponendo che valga la relazione

$$d(f(x)\,\omega) = df(x) \wedge \omega$$

ogni volta che ω è una forma differenziale costante (cioè che non dipende da x).

Ad esempio se ω è una 1-forma differenziale, si potrà scrivere

$$\omega_x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) dx_j$$

e il suo differenziale sarà:

$$(d\omega)_x = \sum_{j=1}^{n} (df_j)_x \wedge dx_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_j.$$

Si potranno poi cancellare i termini della somma con $i = j$ in quanto $dx_i \wedge dx_j = 0$ per la proprietà dell'alternanza. E si potranno associare i termini con gli indici i e j scambiati, essendo $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

6 k-forme nello spazio 3-dimensionale

Se ξ è un campo vettoriale definiamo la sua *divergenza* $\mathrm{div}\xi$ (anche indicata con $\nabla \cdot \xi$) tramite la formula

$$\mathrm{div}\xi = \mathrm{tr}(D\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k}.$$

Se $\omega_{(x,y,z)}$ è la 2-forma in $\mathbb{R}^3$ associata al campo vettoriale $\xi(x,y,z)$ abbiamo visto che ω si può scrivere nel modo seguente:

$$\omega = \xi_1\, dy \wedge dz + \xi_2\, dz \wedge dx + \xi_3\, dx \wedge dy$$

e quindi

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial \xi_2}{\partial y}\, dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial \xi_3}{\partial z}\, dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = (\mathrm{div}\xi)\, dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

in quanto i temini che risultano avere dei differenziali ripetuti (come $dy \wedge dy \wedge dz$) sono tutti nulli, mentre i prodotti dei differenziali possono essere permutati ricordando che ogni scambio comporta il cambio del segno. Abbiamo quindi osservato che il differenziale delle 2-forme corrisponde all'operatore divergenza nel linguaggio dei campi vettoriali (più in generale questo è vero per le $(n-1)$-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$).

Se ξ è un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ definiamo il suo *rotore* $\mathbf{rot}\,\xi$ (anche indicato con $\nabla \wedge \xi$) tramite la formula:

$$(\mathbf{rot}\,\xi, \mathbf{v}) = \mathrm{div}(\xi \wedge \mathbf{v})$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{rot}\,\xi = \sum_{j=1}^{3} (\mathbf{rot}\,\xi, \mathbf{e_j})\mathbf{e_j} = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{div}(\xi \wedge \mathbf{e_j})\mathbf{e_j} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{e_k}, \xi \wedge \mathbf{e_j})\mathbf{e_j}$$

che formalmente si può scrivere nella forma:

$$“\mathbf{rot}\,\xi = (\nabla, \xi \wedge \mathbf{e}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \xi_1 & \mathbf{e_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \xi_2 & \mathbf{e_2} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \xi_3 & \mathbf{e_3} \end{pmatrix}”.$$

Se ω è la 1-forma differenziale rappresentata dal campo ξ, cioè

$$\omega = \xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz$$

si ha

$$\begin{aligned} d\omega = & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} dx \wedge dy \\ & + \frac{\partial \xi_2}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial \xi_3}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial \xi_3}{\partial y} dy \wedge dz \\ = & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \right) dx \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\ = & (\mathbf{rot}\,\xi)_3\, dx \wedge dy + (\mathbf{rot}\,\xi)_2\, dz \wedge dx + (\mathbf{rot}\,\xi)_1\, dy \wedge dz \end{aligned}$$

da cui si evince che se ω rappresenta il campo ξ, il differenziale $d\omega$ rappresenta il campo $\mathbf{rot}\,\xi$.

Se apparentemente sia le 1-forme di $\mathbb{R}^3$ che le 2-forme di $\mathbb{R}^3$ si possono rappresentare nello stesso modo, tramite un campo vettoriale, le due categorie di oggetti sono in realtà molto diversi tra loro. La differenza essendo come si trasformano questi oggetti attraverso un cambio di variabili negli integrali.

7 integrale di una k-forma su una k-superficie

Sia $\Phi \colon E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. L'insieme $S = \Phi(E)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che tramite la mappa Φ viene descritto al variare di k parametri. Diremo che S è una superficie parametrizzata da Φ. Se $\tilde{\Phi} \colon F \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è un'altra funzione tale per cui esiste una funzione bigettiva $\Psi \colon F \to E$ di classe $\mathcal{C}^1$ con $\det D\Psi \neq 0$ che ci dà:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{v}) = \Phi(\Psi(\mathbf{v})) \qquad \forall \mathbf{v} \in F$$

allora diremo che $\tilde{\Phi}$ è una riparametrizzazione di Φ (o anche, impropriamente, della superficie $S = \Phi(E) = \tilde{\Phi}(F)$) e che Ψ è il cambio di variabile corrispondente. Usualmente $\tilde{\Phi}$ e Φ vengono identificati come la stessa *superficie* e si distinguono per il nome dato alle variabili:

$$x = \Phi(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u} = \Psi(\mathbf{v}), \qquad x = \tilde{\Phi}(\mathbf{v}) = \Phi(\Psi(\mathbf{v})).$$

Osserviamo che (se F è connesso, come si supporrà sempre nel seguito), il segno di $\det D\Psi$ è costante[3]. Diremo quindi che Φ e $\tilde{\Phi}$ hanno la *stessa orientazione* se $\det D\Psi > 0$, diremo invece che hanno *orientazione opposta* se $\det D\Psi < 0$.

3 altrimenti se ci fossero due punti con $\det D\psi$ di segno opposto, sulla curva che li congiunge la funzione $\det D\Psi$, che è continua, dovrebbe annullarsi in almeno un punto, per il teorema degli zeri.

Se ω è una k-forma differenziale definita su un aperto contenente $S = \Phi(E)$, definiamo l'integrale di ω su Φ (o, impropriamente, su S) come:

$$\int_\Phi \omega = \int_E \omega_{\Phi(\mathbf{u})} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}(\mathbf{u}) \right) du_1 \dots du_k.$$

Se rappresentiamo i k vettori argomento della k-forma, con una matrice $n \times k$ le cui colonne sono i vettori, potremo scrivere più semplicemente:

$$\omega \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}(\mathbf{u}) \right) = \omega(D\Phi).$$

Ora se prendiamo il cambio di variabile Ψ, come sopra, osserviamo che si ha, utilizzando la formula per il cambio di variabili $\mathbf{u} = \Psi(\mathbf{v})$, $du_1 \dots du_n = |detD\Psi|$

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega &= \int_E \omega_{\Phi(\mathbf{u})}(D\Phi(\mathbf{u}))\, du_1 \dots du_k \\ &= \int_F \omega_{\Phi(\Psi(\mathbf{v}))}(D\Phi(\Psi(\mathbf{v})))\, |\det D\Psi(\mathbf{v})|\, dv_1 \dots dv_k.\end{aligned}$$

A questo punto entrano finalmente in gioco le proprietà delle k-forme alternanti. Come abbiamo già osservato nella dimostrazione della formula dell'area per le applicazioni lineari, se A è una matrice $n \times k$ e S è una matrice $k \times k$ semplice *destra* (ovvero una matrice che opera lo scambio di due colonne, o la somma ad una colonna di un multiplo di un'altra colonna, se moltiplicata sul lato destro) allora dalle proprietà di alternanza, si deduce che

$$\omega(AS) = \omega(A) \det S.$$

La proprietà di multilinearità di ω ci dice che la stessa proprietà vale se S è una matrice diagonale. Di conseguenza, tramite l'algoritmo di riduzione di Gauss, possiamo verificare che la proprietà vale per qualunque matrice S.

Dunque nel conto che stavamo facendo possiamo senz'altro dire che $\omega(D\Phi)|\det D\Psi| = \pm\omega(D\Phi D\Psi)$ dove il segno sarà positivo se il cambio di variabile mantiene l'orientamento, negativo altrimenti.

Si avrà dunque:

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega &= \pm \int_F \omega_{\tilde\Phi(\mathbf{v})}(D\Phi(\Psi(\mathbf{v}))D\Psi(\mathbf{v}))\, dv_1 \dots dv_k \\ &= \pm \int_F \omega_{\tilde\Phi(\mathbf{v})}(D\tilde\Phi(\mathbf{v}))\, dv_1 \dots dv_k = \pm \int_{\tilde\Phi} \omega.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che l'integrale di una forma differenziale su una superficie parametrizzata, non dipende dalla parametrizzazione e si conserva se le parametrizzazioni hanno la stessa orientazione, cambia invece segno se le parametrizzazioni hanno orientazione opposta.

Osserviamo anche che la notazione usata per le forme differenziali è coerente con quella utilizzata negli integrali. Se infatti ω è una n-forma in un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ e prendiamo come parametrizzazione Φ di E l'identità, si ha

$$\omega_x = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

e

$$\int_\Phi \omega = \int_\Phi f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_E f(x)\, dx_1 \dots dx_n.$$

8 IL TEOREMA DEL ROTORE

Lemma 8.1. *Se* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *sono vettori di* $\mathbb{R}^3$*, si ha:*

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Lemma 8.2. *Se* ξ *è un campo vettoriale e* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *sono vettori di* $\mathbb{R}^n$*, si ha:*

$$(D\xi\, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \operatorname{div}((\xi, \mathbf{v})\mathbf{u}).$$

Teorema 8.3 (Kelvin-Stokes)**.** *Sia* $E \subset \mathbb{R}^2$ *un dominio normale rispetto ad entrambe le variabili, la cui frontiera può essere percorsa in senso antiorario da una curva* $\gamma\colon [a, b] \to \partial E$ *di classe* $\mathcal{C}^1$ *a tratti. Sia* $\Phi\colon E \to \mathbb{R}^3$ *una funzione di classe* $\mathcal{C}^2$*. Dato* $\xi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vettoriale di classe* $\mathcal{C}^1$ *definito su un aperto* Ω *che contiene* $[\Phi] = \Phi(E)$ *si ha*

$$\int_E \left(\mathbf{rot}\, \xi(\Phi(u, v)), \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right) du\, dv$$
$$= \int_a^b (\xi(\Phi \circ \gamma(t)), (\Phi \circ \gamma)'(t))\, dt.$$

Poniamo per brevità $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ e $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$. Abbiamo osservato altrove che $|\Phi_u \wedge \Phi_v| = J(D\Phi)$. Inoltre se $\Phi_u \wedge \Phi_v \neq \mathbf{0}$ i vettori Φ_u e Φ_v sono indipendenti e generano lo spazio vettoriale parallelo al piano tangente alla superficie $S = [\Phi] = \Phi(E)$ nel punto $\Phi(u, v)$. Il vettore $\Phi_u \wedge \Phi_v$ è quindi ortogonale al piano tangente e potremo definire il versore normale come:

$$\nu_S = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}.$$

Si ha dunque:

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \nu_S\, J(D\Phi).$$

Analogamente se $\gamma(t)$ è la curva che si ottiene concatendando γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4, e se $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$, allora γ' è un vettore tangente alla curva che descrive il bordo della superficie S: $[\gamma] = \partial S$ nel punto $\gamma(t)$. Possiamo quindi definire il versore tangente come

$$\tau_{\partial S} = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}.$$

Dunque se la parametrizzazione Φ è regolare (o comunque se i punti non regolari hanno misura nulla e quindi non incidono sul valore dell'integrale), il teorema precedente si potrà quindi enunciare in modo indipendente dalla parametrizzazione come segue:

$$\int_S (\mathbf{rot}\, \xi, \nu_S)\, d\sigma = \int_{\partial S} (\xi, \tau)\, ds$$

dove con $d\sigma$ si intende la misura di superficie (così come introdotta negli integrali di superficie) e con ds si intende la lunghezza d'arco (così come introdotta negli integrali curvilinei).

Dimostrazione. Usiamo sempre la notazione $\Phi_u = \partial\Phi/\partial u$, $\Phi_v = \partial\Phi/\partial v$ e definiamo

$$a(u, v) = (\xi(\Phi(u, v)), \Phi_u(u, v))$$
$$b(u, v) = (\xi(\Phi(u, v)), \Phi_v(u, v))\,.$$

Consideriamo quindi la forma differenziale $\omega = a\,du + b\,dv$ e calcoliamo il coefficiente di $d\omega$ (abbreviamo le notazioni ricordando che le derivate di Φ sono sempre calcolate in (u, v) mentre ξ è calcolata in $\Phi(u, v)$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}(\xi, \Phi_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\xi, \Phi_u) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u}\xi \circ \Phi, \Phi_v\right) + (\xi, \Phi_{uv}) - \left(\frac{\partial}{\partial v}\xi \circ \Phi, \Phi_u\right) - (\xi, \Phi_{vu}) \\
&= (D\xi\Phi_u, \Phi_v) - (D\xi\Phi_v, \Phi_u) \\
&= \operatorname{div}(\xi, \Phi_v)\Phi_u - \operatorname{div}(\xi, \Phi_u)\Phi_v \\
&= \operatorname{div}((\xi, \Phi_v)\Phi u - (\xi, \Phi_u)\Phi_v) \\
&= \operatorname{div}(\xi \wedge (\Phi_u \wedge \Phi_v)) \\
&= (\mathbf{rot}\,\xi, \Phi_u \wedge \Phi_v).
\end{aligned}$$

Nella derivazione precedente abbiamo usato il Lemma 8.1 e il Lemma 8.2

Posto $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, le formule di Green ci dicono che vale

$$\begin{aligned}
&\int_E (\mathbf{rot}\,\xi, \Phi_u \wedge \Phi_v) \\
&= \int_E \frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}\,du\,dv = \int_\gamma a(u, v)\,du + b(u, v)\,dv \\
&= \int_a^b a(\gamma(t))u'(t) + b(\gamma(t))v'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (\xi(\Phi(\gamma(t))), \Phi_u(\gamma(t))u'(t) + (\xi(\Phi(\gamma(t))), \Phi_v(\gamma(t))v'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (\xi(\Phi(\gamma(t))), (\Phi \circ \gamma)'(t))\,dt.
\end{aligned}$$

che è la formula che si voleva dimostrare. □

MODIFICHE

26.10.2014 Prima stesura.

10.2.2015 Piccole aggiunte (chiarificazioni).