

Università degli Studi di Firenze

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Il determinante jacobiano
per mappe singolari**

Candidato:
Guido de Philippis

Relatore:
Dott. Emanuele Paolini

Anno Accademico 2008-2009

INDICE

Introduzione	2
1 Nozioni Preliminari	6
1.1 Teoria della misura	6
1.2 Mappe di Sobolev e mappe BV	9
1.2.1 Spazi L^p e convergenza debole	9
1.2.2 Distribuzioni	10
1.2.3 Mappe di Sobolev e BV	11
1.3 Grado di Brouwer	13
1.4 Teoria geometrica della misura	15
1.4.1 Algebra multilineare	15
1.4.2 Correnti ed un teorema di White	17
2 Il determinante jacobiano	21
2.1 Il determinante per mappe di Sobolev	21
2.2 Continuità dei minori	22
3 Il determinante distribuzionale	28
3.1 Prime proprietà ed esempi	28
3.2 Mappe a valori in sfere I	31
4 La Variazione Totale	34
4.1 Definizione e prime proprietà	34
4.2 Dipendenza di TV dal dominio	36
4.3 La variazione totale e il determinante distribuzionale	41
4.4 Mappe a valori in sfere II	44
5 Mappe che preservano l'orientazione in senso debole	55
5.1 Grado di Brouwer e determinante distribuzionale	55
5.2 Mappe debolmente monotone	63
Bibliografia	68
Lista dei simboli	71

INTRODUZIONE

In questa tesi studieremo la possibilità di estendere la nozione di *determinante jacobiano* a mappe di Sobolev $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nel caso il gradiente di u sia poco sommabile, per l'esattezza ci interesseremo al caso in cui $u \in W^{1,p}$ con $p < n$.

L'esigenza di tale estensione nasce da problemi variazionali legati all'elasticità non lineare [3, 4, 31, 40] in cui la presenza di minimi discontinui (che sono possibili solo per $p < n$) è legata al fenomeno della *cavitazione*.

Inoltre, l'interesse per le proprietà del determinante jacobiano, e in generale dei minori del gradiente di u , è legato allo studio di funzionali *policonvessi*, [11], ossia a funzionali della forma:

$$\int_{\Omega} g(\mathcal{M}(Du))$$

dove g è una funzione convessa e $\mathcal{M}(Du)$ è il vettore di tutti i minori di Du .

Entrando nello specifico, sia $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa di classe $W^{1,p}$, l'applicazione

$$\begin{aligned} W^{1,p} &\rightarrow L^n \\ u &\mapsto \det Du \end{aligned} \tag{0.1}$$

è, grazie alla disuguaglianza di Hölder, ben definita solo se $p \geq n$, inoltre è continua se equipaggiamo entrambi gli spazi con la topologia forte. Fatto più sorprendente è che risulta continua anche se consideriamo la topologia debole su $W^{1,p}$ e su L^n (debole-* nel caso $p = n$)¹.

Conseguenza di ciò è la semicontinuità inferiore rispetto alla topologia debole del funzionale:

$$u \mapsto TV(u) := \int_{\Omega} |\det Du|. \tag{0.2}$$

Nel caso in cui $p < n$, invece, l'applicazione (0.1) non è in generale ben definita e, anche nel caso lo sia, non risulta continua. Inoltre, in generale, il funzionale (0.2) non è semicontinuo inferiormente.

Questo tipo di fenomeno è dovuta al fatto che la definizione "puntuale" di $\det Du$ non tiene conto di eventuali "fratture" che si possono formare nell'immagine di u (esempio 2.7).

Ci sono sostanzialmente due modi, che vedremo non essere equivalenti, per recuperare anche per mappe singolari alcune delle proprietà che caratterizzano il determinante jacobiano e la sua variazione totale nel caso di mappe lisce. Il primo si basa sulla formula di integrazione per parti del determinante (0.3) e porta alla definizione di *determinante distribuzionale*, apparsa per la prima volta in [34] e poi ripresa e studiata da vari autori. Il secondo, invece, si collega ai metodi classici di rilassamento nel Calcolo delle Variazioni (sezione 4.1) e porta alla definizione di *variazione totale rilassata* (nel seguito semplicemente *variazione totale*) introdotta in [30].

¹ Diciamo che $f_k \xrightarrow{*} f$ se:

$$\int f_k \varphi \rightarrow \int f \varphi$$

per ogni φ continua e a supporto compatto

Più precisamente, se u è una mappa liscia abbiamo (sezione 2.1) che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \varphi \det Du = -\frac{1}{n} \int_{\Omega} u \operatorname{adj} Du \cdot D\varphi. \quad (0.3)$$

dove $\operatorname{adj} Du$ è la trasposta della matrice dei cofattori di Du .

Questa uguaglianza, che per densità si estende a mappe in $W^{1,n}$, suggerisce di definire il determinante distribuzionale come:

$$\langle \operatorname{Det} Du, \varphi \rangle := -\frac{1}{n} \int_{\Omega} u \operatorname{adj} Du \cdot D\varphi$$

che risulta una distribuzione ben definita non appena $u \operatorname{adj} Du \in L^1_{loc}$, ad esempio se $u \in W^{1,p} \cap L^\infty$ con $p \geq n-1$.

In generale, se $p < n$, si ha che $\det Du \neq \operatorname{Det} Du$, tuttavia nel caso in cui $\operatorname{Det} Du$ sia una misura si può mostrare che la sua parte assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue coincide proprio con $\det Du$. Ad esempio, se u è a valori in una varietà $(n-1)$ -dimensionale $\det Du = 0$ mentre in generale $\operatorname{Det} Du \neq 0$. Quest'ultimo fatto è legato alla possibilità di approssimare u con mappe lisce a valori nella varietà, problema che in genere non ha soluzione nel caso in cui $p < n$.

Se la mappa è a valori in S^{n-1} si può provare che u può essere approssimata con funzioni lisce a valori in S^{n-1} se, e solo se, $\operatorname{Det} Du = 0$. Questo è stato provato in [5] e nella sezione 4.4 ne diamo un'altra dimostrazione con ipotesi leggermente diverse utilizzando tecniche tratte da [6].

Per quanto riguarda il secondo approccio, si definisce la *variazione totale di u per rilassamento*:

$$TV_w^p(u, \Omega) = \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| : u_k \in W^{1,n}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p} \right\}. \quad (0.4)$$

Grazie ad un risultato di semicontinuità (teorema 4.2) provato in [12] per mappe lisce questa definizione coincide con la usuale variazione totale del determinante jacobiano.

Le due nozioni non sono equivalenti, si può tuttavia provare che, quando $p > n-1$:

1. se $TV_w^p(u, \Omega) < \infty$ allora $TV_w^p(u, \cdot)$ è una misura (teoremi 4.4 e 4.5);
2. se $TV_s^p(u, \Omega) < \infty$ allora $\operatorname{Det} Du$ è una misura e $|\operatorname{Det} Du|(\cdot) \leq TV_w^p(u, \cdot)$.

In generale si può avere $|\operatorname{Det} Du|(\cdot) < TV_w^p(u, \cdot)$. Scopo di questa tesi è individuare opportune ipotesi sotto le quali sia possibile ottenere l'uguaglianza.

In particolare siamo in grado di dimostrare ciò per mappe a valori in S^{n-1} (teorema 4.25) e, se $n \geq 3$, per una classe di mappe che abbiamo chiamato *WOP* (definizione 5.3) che possono essere pensate come la classe di mappe che preserva l'orientazione in senso debole (teorema 5.8). In effetti, oltre alle condizioni $n \geq 3$ e *WOP*, senza le quali è facile costruire controesempi, siamo in grado di dimostrare il teorema solamente con l'ulteriore condizione, che sembra esclusivamente tecnica, che u sia continua quasi ovunque.

Inspirandoci alla condizione *INV* introdotta in [40] definiamo (definizione 5.10) una classe di mappe, che abbiamo chiamato *debolmente monotone*, per le quali si può dimostrare che, nel caso soddisfino anche *WOP*, un teorema di regolarità (teorema 5.13).

Più precisamente se u è debolmente monotona e preserva l'orientazione si può far vedere, generalizzando alcuni risultati presenti in [40, 44], che u è continua al di fuori di un insieme la cui dimensione

di Hausdorff è minore o uguale a $n - p$. In particolare questa classe di funzioni soddisfa tutte le ipotesi del teorema 5.8.

Notiamo, vedi anche la discussione nella sezione 4.1, che l'uguaglianza $TV_w^p(u, \cdot) = |\text{Det } Du|(\cdot)$ mostra che se $u \in W^{1,p} \cap W^{1,q}$ allora $TV_w^p = TV_w^q$, ossia che il valore dell'estensione funzionale non dipende, se $p > n - 1$, dalla topologia in cui si rilassa. Questo in effetti avviene anche in tutti gli altri esempi conosciuti e porta a congetturare che T_w^p sia indipendente da p .

La tesi si struttura come segue:

CAPITOLO 1 Riportiamo brevemente alcuni risultati preliminari che utilizziamo nel seguito, in particolare nelle prime due sezioni ricordiamo alcuni risultati di teoria della misura e le principali proprietà delle funzioni di Sobolev. Nella terza enunciamo le proprietà principali del grado di Brouwer e infine nell'ultima esponiamo brevemente la teoria delle correnti allo scopo di introdurre un teorema, dovuto ad White [45], che mostra come l'estremo inferiore delle masse di correnti di tipo "disco" sia in effetti uguale al minimo delle masse di correnti rettificabili.

CAPITOLO 2 In questo capitolo iniziamo lo studio del determinante jacobiano per mappe in $W^{1,p}$ dimostrando il teorema di continuità di Reshetnyak (teorema 2.5).

CAPITOLO 3 Introduciamo il determinante distribuzionale, ne illustriamo le principali proprietà ed infine dimostriamo un teorema di struttura per il determinante di mappe a valori in S^{n-1} .

CAPITOLO 4 Dopo aver definito la variazione totale rilassata ne studiamo la dipendenza dal dominio (teoremi 4.4 e 4.5). Nella seconda parte riportiamo alcuni risultati sull'approssimazione di mappe a valori in S^{n-1} ed infine dimostriamo l'uguaglianza tra TV e $|\text{Det } Du|$ per queste funzioni (teorema 4.25).

CAPITOLO 5 Nella prima sezione diamo la definizione di grado topologico per mappe discontinue presente in [40] e ne mostriamo il legame col determinante distribuzionale. Dopo aver introdotto la classe WOP dimostriamo con l'ausilio del teorema di White l'uguaglianza tra il determinante distribuzionale e la variazione totale per queste funzioni. Nell'ultima sezione introduciamo le mappe *debolmente monotone* e ne studiamo le proprietà di continuità (teorema 5.13).

 NOZIONI PRELIMINARI

In questo capitolo enunciamo, principalmente senza dimostrazione, alcune nozioni che ci saranno utili in seguito per lo più per fissare le notazioni. Enunceremo spesso i risultati non nella loro massima generalità ma nella forma in cui li useremo nel seguito.

I riferimenti bibliografici sono: per la prima sezione [15, 26, 20], per la seconda [15, 26, 46], per la terza [19, 28, 32], per la quarta [16, 33, 43].

1.1 TEORIA DELLA MISURA

Riportiamo brevemente alcune nozioni di teoria astratta. Nel seguito X indicherà uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto.

Definizione 1.1. Una famiglia di insiemi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è detta σ -algebra se vale:

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$
2. se $E \in \mathcal{E}$ allora $E^c \in \mathcal{E}$
3. se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{E}$

L'intersezione di σ -algebre è ancora una σ -algebra quindi è ben definita, per ogni $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, la σ -algebra generata da S come la più piccola σ -algebra che lo contiene. Nel seguito indicheremo con $\mathcal{B}(X)$ la σ -algebra generata dagli aperti di X (detta di Borel).

Una funzione da X in \mathbb{R} è detta \mathcal{E} -misurabile se $f^{-1}(U) \in \mathcal{E}$ per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}$, per funzioni a valori vettoriali la definizione si dà per componenti.

Definizione 1.2. Una funzione $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ dove \mathcal{E} è una σ -algebra è detta *misura positiva* se:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ se $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Ad ogni misura μ è naturalmente associata una sigma algebra detta dei μ -misurabili definita da:

$$\mathcal{M}_\mu = \{E: \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \text{ per ogni } A \subset X\}.$$

Si può dimostrare che $\mu: \mathcal{M}_\mu \rightarrow [0, +\infty]$ è σ -addittiva ossia:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \quad \text{se } E_k \in \mathcal{M}_\mu \text{ disgiunti}$$

Ricordiamo anche:

Lemma 1.3 (Lemma di Borel-Cantelli). *Se $A_k \in \mathcal{M}_\mu$ sono tali che:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$$

allora:

$$\mu(\{x: x \in A_k \text{ per infiniti } k\}) = 0$$

Sarà utile nel seguito restringere le misure su sottoinsiemi di X , data una misura μ allora si definisce, per ogni sottoinsieme $A \in \mathcal{M}_\mu$, $\mu \llcorner A$ come $\mu \llcorner A(B) = \mu(A \cap B)$.

Faremo largamente uso della nozione di misura a valori in uno spazio vettoriale, diremo che μ è una *misura vettoriale* a valori in \mathbb{R}^m se esiste una misura positiva ν e una funzione σ misurabile da X in \mathbb{R}^m tale che per ogni $E \in \mathcal{M}_\mu$:

$$\mu(E) := \int_E \sigma(x) d\nu(x).$$

se $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ è misurabile definiamo:

$$\int_X \varphi \cdot d\mu := \int_X \varphi \cdot \sigma d\nu.$$

Data una misura vettoriale μ definiamo la sua variazione totale come $|\mu| = |\sigma|d\nu$ ossia come la misura definita da:

$$|\mu|(E) := \int_E |\sigma(x)| d\nu(x).$$

si può verificare che questa definizione non dipende dalla scrittura di μ come $\sigma d\nu$ e che la variazione totale è caratterizzata da:

$$|\mu|(E) = \inf\{\sum |\mu(E_k)| \text{ con } E = \bigcup E_k \text{ } E_k \text{ disgiunti}\}.$$

Una misura positiva è detta:

- σ -finita se esistono $A_k \in \mathcal{M}_\mu$ per cui $X = \bigcup A_k$ con $\mu(A_k) < \infty$
- di Borel se $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_\mu$
- di Radon se è di Borel e $\mu(K) < \infty$ per ogni compatto K .

Diremo che una misura vettoriale è di Radon se tale è $|\mu|$. Nelle sezioni successive chiameremo semplicemente misure le misure di Radon su X e le indicheremo con $\mathcal{M}(X)$, inoltre sotto-intenderemo sempre di utilizzare insiemi boreliani.

Ricordiamo che se $X \subset \mathbb{R}^n$, μ è una misura di Radon positiva ed E è boreliano abbiamo che:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(A) : A \text{ aperto, } E \subset A\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \text{ compatto, } K \subset E\} \end{aligned}$$

Il teorema successivo illustra l'importanza delle misure di Radon in analisi:

Teorema 1.4 (Riesz). Sia $L : C_c^0(X; \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare tale che per ogni compatto K esiste una costante $C(K)$ per cui:

$$L(\varphi) \leq C(K) \|\varphi\|_\infty \quad \text{per ogni } \varphi \text{ tale che } \text{spt } \varphi \subseteq K$$

allora esiste una misura di Radon positiva μ e una funzione $\sigma \in L^\infty(X; \mathbb{R}^k)$ tale che:

$$L(\varphi) = \int \sigma \cdot \varphi d\mu$$

Osserviamo che nel caso di funzionali definiti su $C_c^0(X; \mathbb{R})$ le ipotesi del teorema sono soddisfatte da funzionali lineari e *positivi* ossia tali che $L(\varphi) \geq 0$ se $\varphi \geq 0$. Infatti sia $\varphi \in C_c^0(X; \mathbb{R})$, $\text{spt } \varphi \subseteq K$, $\chi \in C_c^0(X; [0, 1])$ con $K \subset \{\chi = 1\}$ allora:

$$-\chi \|\varphi\|_\infty \leq \varphi \leq \chi \|\varphi\|_\infty$$

e quindi:

$$|L(\varphi)| \leq L(\chi) \|\varphi\|_\infty.$$

Notiamo inoltre che, detta $\nu = \sigma d\mu$, abbiamo

$$\|L\| = |\nu|(X) = \sup \left\{ \int \sigma \cdot \varphi d\mu : \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Utilizzando il teorema 1.4 è possibile definire una convergenza tra misure di Radon, più precisamente diremo che una successione di misure di Radon $\{\mu_k\}$ converge *debole ** a una misura μ se per ogni funzione φ appartenente a $C_c^0(X; \mathbb{R}^k)$ si ha:

$$\int \varphi \cdot d\mu_k \rightarrow \int \varphi \cdot d\mu.$$

Nel caso di misure a valori in $[0, +\infty]$ valgono le seguenti proprietà di facile dimostrazione:

- $\mu(A) \leq \liminf \mu_k(A)$ per ogni aperto A
- $\mu(K) \geq \limsup \mu_k(K)$ per ogni compatto K
- $\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(E)$ per ogni boreliano E con $\mu(\partial E) = 0$.

Queste non sono vere nel caso di misure a valori vettoriali, tuttavia per ogni aperto A abbiamo:

$$|\mu|(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |\mu_k|(A)$$

Immediata conseguenza del teorema di Banach-Alaoglu è il seguente criterio di compattezza:

Teorema 1.5. *Sia $\{\mu_k\}$ una successione di misure di Radon, supponiamo che $\sup |\mu_k|(X) \leq C$, allora esiste una sottosuccessione μ_{k_n} e una misura μ tale che:*

$$\mu_{k_n} \xrightarrow{*} \mu$$

Trattiamo ora brevemente la differenziazione di misure, date due misure di Radon μ e ν diremo che:

- μ è *assolutamente continua* rispetto a ν , e scriveremo $\mu \ll \nu$ se:

$$|\nu|(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

- μ e ν sono *singolari*, e scriveremo $\nu \perp \mu$ se esiste un insieme misurabile A tale che:

$$|\mu|(A) = |\nu|(X \setminus A) = 0.$$

Si ha ovviamente che $\mu \ll |\mu|$ e inoltre se $\nu = fd\mu$ allora $\nu \ll \mu$, la precedente osservazione si può invertire nel seguente:

Teorema 1.6 (Radon-Nykodim). *Siano μ e ν due misure su X con μ positiva, supponiamo che X sia σ -finito rispetto a μ e $|\nu|$. Allora esiste un'unica funzione $f \in L_{loc}^1(\mu)$ e una misura ν_s singolare rispetto a μ tale che:*

$$\nu = fd\mu + \nu_s.$$

Ovviamente l'unicità di f è da intendersi a meno di modifiche su insiemi di misura nulla.

Nel caso di misure definite su sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^n la funzione f è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}$$

che esiste μ quasi ovunque.

Concludiamo questa sezione enunciando il teorema di ricoprimento di Besicovitch che useremo più volte in seguito.

Teorema 1.7 (Besicovitch). Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e \mathcal{F} una famiglia di palle chiuse tali che:

1. E è contenuto nell'insieme dei centri di \mathcal{F}
2. $\inf\{r: \overline{B(x,r)} \in \mathcal{F}\} = 0$ per ogni $x \in E$ (chiameremo un tale ricoprimento fine)

e sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ una misura di Radon positiva, allora esiste una sottofamiglia numerabile $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ di palle con interno disgiunto tale che:

$$\mu(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}_0} B) = 0.$$

Osserviamo che nel teorema possiamo sostituire alle palle chiuse palle aperte se, e nel seguito sarà sempre così, per ogni $x \in E$ l'insieme $\{r: \overline{B(x,r)} \in \mathcal{F}\}$ è non numerabile. Notiamo anche che se E è un aperto possiamo supporre che ogni palla in \mathcal{F} sia contenuta in E e pertanto:

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}_0} B\right) + \mu\left(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}_0} B\right) = \mu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}_0} B\right).$$

Infine sottolineiamo, poiché ci sarà utile in seguito, come nel precedente teorema e nelle osservazioni successive, sia possibile sostituire alle palle altre famiglie di insiemi, in particolare il teorema vale per cubi e più in generale per insiemi del tipo:

$$C(x,r) = x + rC$$

con C convesso, compatto tale che $0 \in \text{Int}(C)$, per l'enunciato nella sua completa generalità e le dimostrazioni rimandiamo a [20].

1.2 MAPPE DI SOBOLEV E MAPPE BV

Nel seguito della sezione, e della tesi, indicheremo con Ω un sottoinsieme aperto e limitato di \mathbb{R}^n e con C, M, K generiche costanti il cui valore può cambiare anche nel corso della stessa espressione.

1.2.1 Spazi L^p e convergenza debole

Indichiamo, per $p \in [1, \infty)$, con $L^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$ lo spazio delle funzioni misurabili con p -esima potenza sommabile e con L^∞ lo spazio delle funzioni essenzialmente limitate (ometteremo spesso lo spazio di arrivo se è chiaro dal contesto), ricordiamo che L^p è uno spazio di Banach rispetto alla norma:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}|f(x)| & p = \infty. \end{cases}$$

Inoltre se $1 \leq p < \infty$ abbiamo che $(L^p)^* = L^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Scriveremo quindi che:

$$f_k \rightharpoonup f \quad \text{debole } L^p \text{ (debole-* } L^\infty)$$

se:

$$\int f_k g \rightarrow \int f g \quad \text{per ogni } g \in L^{p'}.$$

Le proprietà principali che useremo, sono per $1 < p \leq \infty$ e $f_k \rightharpoonup f$:

1. $\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p}$.
2. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p} \leq C$.

3. (*Banach-Alaoglu*) Se $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p} \leq C$ allora esiste una sottosuccessione debolmente convergente (debolmente-* se $p = \infty$).

Useremo spesso la seguente:

Proposizione 1.8. Sia $f_k \rightarrow f$ in L^p e $g_k \rightarrow g$ in $L^{p'}$ allora:

$$\int f_k g_k \rightarrow \int f g$$

Dimostrazione. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder e l'osservazione precedente:

$$\begin{aligned} & \left| \int f_k g_k - \int f g \right| \leq \\ & \left| \int f_k g_k - \int f g_k \right| + \left| \int f g_k - \int f g \right| \leq \\ & \|f_k - f\|_{L^p} \|g_k\|_{L^{p'}} + \left| \int f g_k - \int f g \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

1.2.2 Distribuzioni

Ricordiamo ora alcuni concetti della teoria delle distribuzioni; sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, indichiamo con $\mathcal{D}(U)$ l'insieme delle funzioni $C^\infty(U; \mathbb{R})$ a supporto compatto con la seguente nozione di convergenza, $\varphi_k \rightarrow \varphi$ se:

1. esiste un compatto $K \subset U$ tale che $\text{spt } \varphi_k \subset K$ per ogni k
2. per ogni multi-indice α , $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente.

Diremo che T è una distribuzione e scriveremo $T \in \mathcal{D}'(U)$ se l'applicazione $T: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e continua ossia se:

$$\langle T, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{se } \varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Si può provare che per ogni compatto $K \subset U$ esiste una costante $C(K)$ e un intero $m(K)$ tale che se $T \in \mathcal{D}'(U)$:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C(K) \|\varphi\|_{C^{m(K)}(K)}$$

dove:

$$\|\varphi\|_{C^m(K)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

Diremo che una distribuzione ha ordine minore o uguale a m se $m(K)$ non dipende da K .

Osserviamo che il teorema 1.4 ci dice che ogni distribuzione di ordine 0 è rappresentabile da una misura di Radon, questo in particolare è vero per le distribuzioni positive ossia tali per cui $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$ se $\varphi \geq 0$.

Ricordiamo che $L^1_{loc}(U)$ si immerge in modo naturale in $\mathcal{D}'(U)$ ponendo:

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_U f(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } f \in L^1_{loc}.$$

Considerazioni analoghe valgono per lo spazio delle misure di Radon.

Diremo che una successione di distribuzioni T_k converge debolmente-* a T , e scriveremo $T_k \xrightarrow{*} T$, se:

$$\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Se T è una distribuzione definiamo, per ogni multi-indice α , la sua derivata come:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Mostriamo ora come approssimare una distribuzione con funzioni regolari. Sia $\varrho \in C_c^\infty(B(0,1))$ positiva e con integrale 1, definiamo una famiglia di nuclei mollificatori $\varrho_\varepsilon \in C_c^\infty(B(0,\varepsilon))$ come:

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Per $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definiamo:

$$f_\varepsilon(x) = \int f(x-y)\varrho_\varepsilon(y)dy.$$

Le seguenti proprietà sono ben note:

1. $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. $f_\varepsilon \rightarrow f$ quasi ovunque
3. $f_\varepsilon \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
4. $f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente sui compatti se $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$
5. $(D^\alpha f)_\varepsilon = D^\alpha f_\varepsilon$ se $f \in C^m$ e $|\alpha| \leq m$.

Definiamo ora per ogni distribuzione T la funzione:

$$T_\varepsilon(x) := T * \varrho_\varepsilon(x) = \langle T, \varrho_\varepsilon(\cdot - x) \rangle,$$

e consideriamo la distribuzione associata (che indichiamo sempre con T_ε) definita su $U_\varepsilon = \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$:

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \int T_\varepsilon(x)\varphi(x) = \langle T, (\varphi)_\varepsilon \rangle$$

allora $T_\varepsilon \in C^\infty$ e $T_\varepsilon \xrightarrow{*} T$.

Inoltre se $\mu \in \mathcal{M}(U)$ è una misura di Radon, che possiamo scrivere come $\mu = f d\mathcal{L}^n + \mu_s$, ricordiamo che:

$$\mu_\varepsilon(x) \rightarrow f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n \text{ quasi ogni } x.$$

1.2.3 Mappe di Sobolev e BV

Passiamo ora ad introdurre gli spazi di Sobolev. Diremo che una funzione u appartiene a $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ se u e Du (intesa in senso distribuzionale) sono funzioni in $L^p(\Omega)$. Se $u \in L^1(\Omega)$ è tale per cui $Du \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^{nk})$ allora diremo che u è una funzione in $BV(\Omega; \mathbb{R}^k)$.

È noto che $W^{1,p}(\Omega)$ e $BV(\Omega)$ sono spazi di Banach rispetto alle norme:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega).$$

Diremo inoltre che un sottoinsieme di \mathbb{R}^n ha perimetro finito se $1_E \in BV(\mathbb{R}^n)$, per la teoria degli insiemi di perimetro finito rimandiamo a [15] a cui ci riferiamo anche per le notazioni.

Data una successione di funzioni $\{u_k\} \subset W^{1,p}$ diremo che questa converge:

- forte a u se $\|u_k - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$
- debole a u se $u_k \rightharpoonup u$ e $Du_k \rightharpoonup Du$ nella topologia debole di L^p (debole-* se $p = \infty$).

Vedremo in seguito come la convergenza debole dei gradienti garantisca di fatto una convergenza migliore delle funzioni.

Il teorema seguente prova la densità delle mappe regolari negli spazi di Sobolev:

Teorema 1.9 (Meyers-Serrin). *Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n allora $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}$ rispetto alla topologia forte.*

Definiamo $W_0^{1,p}(\Omega)$ come la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}$. In generale $W^{1,p}(\Omega) \neq W_0^{1,p}(\Omega)$, quest'ultime rappresentano le funzioni che sono nulle su $\partial\Omega$.

La sommabilità dei gradienti garantisce una maggiore regolarità delle funzioni, infatti si ha:

Teorema 1.10 (Immersione di Sobolev). *Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di \mathbb{R}^n con bordo lipschitziano allora:*

1. se $p < n$, $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in L^r con $r \in [1, p^*]$ con $p^* = \frac{pn}{n-p}$ l'immersione inoltre è compatta¹ per $r \in [1, p^*)$
2. $BV(\Omega)$ si immerge in modo continuo in L^r con $r \in [1, n^*]$ inoltre l'immersione è compatta per $r \in [1, n^*)$
3. $W^{1,n}(\Omega)$ si immerge in modo continuo e compatto in L^r con $r \in [1, \infty)$
4. se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $\alpha \leq 1 - \frac{n}{p}$ inoltre l'immersione è compatta se $\alpha < 1 - \frac{n}{p}$.

Una stima quantitativa dell'ultima parte del teorema è data dalla disuguaglianza di Morrey:

Proposizione 1.11 (Morrey). *Sia $u \in W^{1,p}(B(x,r))$ $p > n$ allora:*

$$|u(z) - u(y)| \leq C(n,p)r^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

per ogni $y, z \in B(x,r)$.

Riportiamo infine una versione della disuguaglianza di Poincaré che useremo in seguito:

Proposizione 1.12 (Poincaré). *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\text{spt } u \subset K$, K compatto, allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \leq C(|K|, n, p) \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p.$$

La proposizione precedente vale anche se $u \in BV$ a patto di sostituire $\int |Du|$ con $|Du|(\mathbb{R}^n)$.

Nei capitoli successivi incontreremo anche mappe di Sobolev definite tra varietà. Siano $M^k \subset \mathbb{R}^n$ e $N^l \subset \mathbb{R}^m$ due varietà compatte di dimensione k e s , e consideriamo una atlante (che per compattezza possiamo supporre finito) (U_i, φ_i) di M .

Diremo che una mappa $u: M^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ appartiene a $W^{1,p}(M^k; \mathbb{R}^m)$ se, per ogni i , $u \circ \varphi_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^m)$. Definiamo la norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}(M^k; \mathbb{R}^m)} = \sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(U_i)} |u \circ \varphi|^p + |D(u \circ \varphi_i)|^p d\mathcal{L}^k$$

la scelta di un atlante diverso dà luogo a norme equivalenti.

Per questa classe di funzioni valgono teoremi del tutto analoghi a quelli precedentemente enunciati dove il ruolo di n è ovviamente sostituito da $\dim M$.

Definiamo ora:

$$W^{1,p}(M^k; N^l) = \{u \in W^{1,p}(M^k; \mathbb{R}^m) : u(x) \in N \text{ per } \mathcal{H}^k\text{-quasi ogni } x \in M\}$$

¹ ricordiamo che una applicazione lineare si dice compatta se manda limitati in relativamente compatti

² Con $C^{0,\alpha}(\Omega)$ indichiamo lo spazio di Banach delle funzioni α -hölderiane con la norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

che è un sottoinsieme chiuso di $W^{1,p}(M^k; \mathbb{R}^m)$. Definiamo anche:

$$H^{1,p}(M^k; N^l) = \overline{W^{1,p}(M^k; N^l) \cap C^\infty(M^k; N^l)}.$$

dove la chiusura è intesa rispetto alla topologia forte di $W^{1,p}(M^k; \mathbb{R}^m)$. Ricordiamo che, sebbene ogni mappa a valori in N può essere approssimata in norma da mappe lisce a valori in \mathbb{R}^m , non è tuttavia detto che questa siano a valori in N .

Più esattamente si vede facilmente che se $p > \dim M$, grazie all'immersione $W^{1,p}(M; N) \hookrightarrow C^0(M; N)$, allora le funzioni regolari sono dense. Questo si può estendere anche nel caso in cui $p = n$ (vedi [27]). Nel caso in cui $p < \dim M$ invece esistono ostruzioni topologiche per cui, in generale, si ha:

$$H^{1,p}(M^k; N^l) \subsetneq W^{1,p}(M^k; N^l)$$

confronta la sezione 4.4 e [6, 2, 27].

Ricordiamo anche i teoremi di traccia (per la definizione di insieme con bordo lipschitziano rimandiamo a [46]):

Teorema 1.13 (Traccia). *Supponiamo che Ω sia un insieme con bordo lipschitziano allora $C^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$ inoltre esiste un'unico operatore continuo $\text{tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ che coincide con la restrizione al bordo se $u \in W^{1,p} \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Quando tratteremo la restrizione di u a sottoinsiemi con misura di Lebesgue nulla ci riferiremo sempre al rappresentante standard della classe di u che è definito come:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy & \text{se il limite esiste} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le principali proprietà di \bar{u} sono, si veda [46]:

1. detto P l'insieme in cui il limite non esiste si ha $\dim_{\mathcal{H}} P \leq n - p$
2. $(\bar{u})_\varepsilon(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ per ogni $x \in \Omega \setminus P$
3. $\bar{u} \llcorner r$ (3) è assolutamente continua per quasi ogni retta r
4. $\bar{u} \llcorner H$ è in $W^{1,p}(H \cap \Omega)$ per quasi ogni iperpiano H e $D^H \bar{u} = D(u \llcorner H)$, in particolare se $p > n - 1$ risulta che $\bar{u} \llcorner H$ è continua per quasi ogni iperpiano H
5. $\bar{u} \llcorner \partial B(x, r)$ è in $W^{1,p}(\partial B(x, r))$ per quasi ogni r .

Si può provare, si veda [41], che la restrizione di \bar{u} a $\partial B(x, r)$ coincide con la traccia di u per \mathcal{H}^{n-1} quasi ogni punto. Nel seguito quindi non distingueremo tra queste due nozioni.

1.3 GRADO DI BROUWER

In questa sezione ricordiamo alcune proprietà del grado di Brouwer per mappe continue, che si rivelerà uno strumento fondamentale nel seguito.

Indichiamo con M e N due varietà k -dimensionali orientabili con M compatta e $\partial N = \emptyset$ che supporremo immerse, indichiamo inoltre con $\pi_M: (M)_r \rightarrow M$ una retrazione liscia da un opportuno intorno $(M)_r = \{y: \text{dist}(y, M) < r\}$ di M , analogamente per N .

Sia $f: M \rightarrow N$ una funzione C^1 e $y \in N \setminus f(\partial M)$ un valore regolare, allora $\{f^{-1}(y)\}$ è finito e possiamo definire:

$$\text{deg}(f, M, y) := \sum_{x \in \{f^{-1}(y)\}} \text{sign}(\det df_x).$$

³ Se $C \subset \mathbb{R}^n$ indichiamo con $f \llcorner C$ la restrizione di f a C

Si può mostrare che $\deg(f, M, y)$ è localmente costante. In particolare se $\partial M = \emptyset$ e N è connessa allora $\deg(f, M, y)$ è costante e lo indicheremo solo con $\deg(f, M, N)$ o con $\deg(f)$.

Ricordando che, grazie al lemma di Sard, l'insieme dei valori critici ha complementare denso, definiamo per ogni $z \in N \setminus f(\partial M)$:

$$\deg(f, M, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f, M, y_k) \quad y_k \text{ valori regolari}$$

le osservazioni precedenti ci garantiscono che questo non dipende dalla successione approssimante.

Ricordiamo le seguenti proprietà:

1. $\deg(f, M, y)$ è costante su ogni componente connessa di $N \setminus f(\partial M)$.
2. Se $y \notin f(M)$ allora $\deg(f, M, y) = 0$.
3. Se $f^{-1}(y) \subset U \cup V$, U, V aperti e $U \cap V = \emptyset$ allora

$$\deg(f, M, y) = \deg(f, U, y) + \deg(f, V, y).$$

4. Se $H: [0, 1] \times M \rightarrow N$ è una omotopia C^1 tale che $H(0, x) = g(x)$ e $H(1, x) = f(x)$ e $y \notin H(t, \partial M)$ per ogni $t \in [0, 1]$ allora $\deg(g, M, y) = \deg(f, M, y)$.
5. Se $g = f$ su ∂M allora $\deg(g, M, y) = \deg(f, M, y)$, in particolare il grado dipende solo dai valori al bordo.

Il grado di Brouwer può essere definito anche per mappe continue approssimandole con funzioni di classe C^1 , e la proposizione 1.14 ci garantisce che è una buona definizione.

Proposizione 1.14. *Siano f e g mappe C^1 , esiste un $\varepsilon_0(M, N)$ tale che se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ allora f è omotopa a g .*

Dimostrazione. L'omotopia è data da:

$$H(t, x) = \pi_N(tf(x) + (1-t)g(x)).$$

□

Per mappe a valori in \mathbb{S}^k il grado permette di classificare esattamente la classe di omotopia, vale infatti:

Teorema 1.15 (Hopf). *Siano f e g mappe continue da una varietà M , compatta e senza bordo, a valori in \mathbb{S}^k , allora f e g sono omotope se e soltanto se $\deg(f, M, \mathbb{S}^k) = \deg(g, M, \mathbb{S}^k)$.*

Ricordiamo infine alcune formule integrali che caratterizzano il grado e che ci permettono di definirlo per mappa in opportune classi di Sobolev (vedi anche la sezione 5.1). Per le definizioni di forma differenziale e di *pull-back* rimandiamo alla sezione successiva.

Sia $y \in U$, U componente connessa di $N \setminus f(\partial M)$ e φ sia una k -forma a supporto compatto in U e per cui $\int_N \varphi = 1$ allora, si veda [19]:

$$\deg(f, M, y) = \int_M f^\#(\varphi).$$

In particolare abbiamo che se M è una varietà compatta senza bordo e $f: M \rightarrow \mathbb{S}^k$ la forma:

$$\varphi = \frac{1}{k\omega_k} \sum_j (-1)^{j+1} y^j dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{j-1} \wedge dy^{j+1} \wedge \dots \wedge dy^k$$

soddisfa le ipotesi⁴ e quindi:

$$\begin{aligned} \deg(f, M, \mathbb{S}^k) &= \int_M f^\#(\varphi) \\ &= \frac{1}{k\omega_k} \int_M \sum_j (-1)^{j+1} f^j df^1 \wedge \dots \wedge df^{j-1} \wedge df^{j+1} \wedge \dots \wedge df^k \\ &= \frac{1}{k\omega_k} \int_M f(x) \operatorname{adj} Df(x) \cdot \nu_M d\mathcal{H}^k. \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza si confronti la dimostrazione del lemma 2.3. Osserviamo che se $u \in W^{1,p}(M, \mathbb{S}^k)$ con $p > \dim M$ allora, ricordando il teorema di Sobolev, abbiamo che $u \in C^0$ e quindi, approssimandola con mappe lisce a valori in \mathbb{S}^k uniformemente e in $W^{1,p}$, abbiamo che la formula precedente vale anche per u , si veda anche [8, 9].

1.4 TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA

1.4.1 Algebra multilineare

Riportiamo ora alcuni concetti di teoria geometrica della misura. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di \mathbb{R}^n e $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ la base duale di $(\mathbb{R}^n)^*$ ossia tale per cui:

$$dx^i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Per ogni $k, n \in \mathbb{N}$, indichiamo con:

$$\mathcal{I}(k, n) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n\}$$

l'insieme dei multi-indici ordinati di lunghezza k .

Definiamo lo spazio dei k -covettori $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ come l'insieme delle funzioni multi-lineari e alternanti su $(\mathbb{R}^n)^k$ ossia delle

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto \varphi(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

tali che:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, \dots, \lambda v + \mu w, \dots, v_k) \\ = \lambda \varphi(v_1, \dots, v, \dots, v_k) + \mu \varphi(v_1, \dots, w, \dots, v_k) \end{aligned}$$

e

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma \varphi(v_1, \dots, v_k)$$

per ogni permutazione $\sigma \in S_k$, dove $(-1)^\sigma$ è il segno di σ .

Analogamente definiamo lo spazio dei k -vettori $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ come l'insieme delle funzioni multi-lineari e alternanti su $\left((\mathbb{R}^n)^*\right)^k$. Abbiamo $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ e $\Lambda_1(\mathbb{R}^n) \simeq (\mathbb{R}^n)^*$.

Definiamo il prodotto esterno tra k -vettori $\wedge: \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^h(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{h+k}(\mathbb{R}^n)$ associando alla coppia $v \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ e $w \in \Lambda^h(\mathbb{R}^n)$ l' $(h+k)$ -vettore:

$$\begin{aligned} (v \wedge w)(\varphi^1, \dots, \varphi^{(k+h)}) \\ = \frac{1}{h!k!} \sum_{\sigma \in S_{(h+k)}} (-1)^\sigma v(\varphi^{\sigma(1)}, \dots, \varphi^{\sigma(k)}) w(\varphi^{\sigma(h+1)}, \dots, \varphi^{\sigma(h+k)}) \end{aligned}$$

e analogamente per i k -covettori, osserviamo che $v \wedge u = -u \wedge v$.

⁴ $k\omega_k = \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^k)$

Si può verificare che $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$. Diremo che un k -vettore v è semplice se esistono $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ per cui $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

Ad ogni k -vettore semplice e non nullo è possibile associare un sottospazio vettoriale di dimensione k

$$V(v) = \{w \in \mathbb{R}^n : v \wedge w = 0\} = \text{span}(v_1, \dots, v_k),$$

se v e u sono semplici allora $V(v) = V(w)$ se e solo se $v = cu$ per un qualche $c \neq 0$.

Si può inoltre vedere che per ogni $\alpha \in \mathcal{I}(k, n)$ i k -vettori semplici

$$e_\alpha = e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k},$$

formano una base di $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Lo stesso vale per i k -covettori

$$dx^\alpha = dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}.$$

In particolare abbiamo che:

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{se } n \leq k \\ 0 & \text{se } n > k. \end{cases}$$

Gli spazi $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ e $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ sono in dualità mediante l'applicazione che sulle basi è definita da

$$\langle e_\alpha, dx^\beta \rangle = \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\alpha_k}^{\beta_k}.$$

Chiameremo k -forma differenziale un funzione $\omega: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ di classe C^∞ , ossia un'espressione del tipo:

$$\omega(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}(k, n)} \omega_\alpha(x) dx^\alpha$$

con $\omega_\alpha \in \mathcal{D}(U)$. Denotiamo con $\mathcal{D}_k(U)$ lo spazio delle k -forme a supporto compatto. Diremo che una successione di k -forme converge se le loro componenti convergono in $\mathcal{D}(U)$ nel senso introdotto nella sezione precedente.

Se $\omega \in \mathcal{D}_k(U)$ definiamo il suo *differenziale esterno* $d\omega \in \mathcal{D}_{k+1}(U)$ come:

1. $df = \sum \partial_i f dx^i$ se $f \in D_0(U) = D(U)$
2. $d\omega = df \wedge dx^\alpha$ se $\omega = f dx^\alpha$

e estendendolo per linearità. Le principali proprietà del differenziale esterno sono:

1. $d(\omega + \psi) = d\omega + d\psi$;
2. $d(d\omega) = 0$;
3. $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^h \omega \wedge d\varphi$ se $\omega \in \mathcal{D}_k(U)$ e $\varphi \in \mathcal{D}_h(U)$.

Ricordiamo inoltre che se $f: U \rightarrow V$ è una mappa regolare si definisce per ogni forma ω su V il suo *pull back* come la forma definita su U data da:

$$f^\#(\omega) = \sum \omega_\alpha(f(x)) df^\alpha.$$

Se f è propria (ossia la retroimmagine di compatti è compatta) allora $f^\#: \mathcal{D}_k(V) \rightarrow \mathcal{D}_k(U)$, inoltre $d(f^\#\omega) = f^\#(d\omega)$ e $f^\#(\omega \wedge \varphi) = f^\#(\omega) \wedge f^\#(\varphi)$.

1.4.2 Correnti ed un teorema di White

Possiamo ora definire una k -corrente come un funzionale lineare e continuo $T: \mathcal{D}_k(U) \rightarrow \mathbb{R}$ e scriveremo $T \in \mathcal{D}^k(U)$. Diremo che una successione di correnti converge debole-* ($T_k \xrightarrow{*} T$) se $T_k(\omega) \rightarrow T(\omega)$ per ogni forma $\omega \in \mathcal{D}_k(U)$.

Se M è una varietà differenziabile di dimensione k possiamo associargli in modo naturale la corrente:

$$\llbracket M \rrbracket(\omega) = \int_M \langle \omega, \tau_M \rangle d\mathcal{H}^k$$

dove $\tau_M(x)$ è il k -vettore unitario associato a $T_x M$. Possiamo pertanto pensare alle correnti come ad una generalizzazione del concetto di superficie.

Data una corrente $T \in \mathcal{D}^k(U)$ definiamo:

1. $\text{spt } T$ come il più piccolo chiuso tale che $T(\omega) = 0$ se $\text{spt } \omega \subset U \setminus C$
2. $\mathbb{M}(T) = \sup\{T(\omega) : |\omega| \leq 1\}$
3. $\partial T \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$ come la $(k-1)$ -corrente definita da:

$$\partial T(\omega) = T(d\omega),$$

Osserviamo che $\partial^2 T = 0$.

4. Se $f: U \rightarrow V$ è propria e regolare definiamo il *push forward* di T come la corrente $f_{\#} T \in \mathcal{D}^k(V)$ definita da:

$$f_{\#} T(\omega) = T(f^{\#} \omega).$$

Con un procedimento di approssimazione possiamo definire il *push forward* anche con mappe proprie e lipschitziane (vedi [16]).

Nel caso in cui $T = \llbracket M \rrbracket$ abbiamo che $\mathbb{M}(T) = \mathcal{H}^k(M)$ e, per il Teorema di Stokes, $\partial \llbracket M \rrbracket = \llbracket \partial M \rrbracket$.

Introduciamo ora una classe di correnti particolarmente importante. Diremo che un sottoinsieme M di \mathbb{R}^n è \mathcal{H}^k -rettificabile se si può scrivere come:

$$M = M_0 \cup \left(\bigcup M_j \right)$$

dove $\mathcal{H}^k(M_0) = 0$ e $M_j \subset N_j$ con N_j varietà k -dimensionali. Per gli insiemi rettificabili è possibile definire la nozione di piano tangente $T_x M$ in \mathcal{H}^k -quasi ogni punto tale piano coincide con $T_x S$ per \mathcal{H}^k -quasi ogni $x \in M \cap S$ dove S è una varietà k -dimensionale.

Diremo che una k -corrente T è rettificabile e scriveremo $T \in \mathcal{R}^k(U)$ se esiste un insieme k -rettificabile M con $\mathcal{H}^k(M) < \infty$, una funzione $\theta \in L^1(M; \mathbb{Z})$ e una funzione τ_M Borel-misurabile che associa a quasi ogni $x \in M$ il k -vettore unitario associato a $T_x M$, tali per cui:

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \tau_M(x) \rangle \theta(x) d\mathcal{H}^k.$$

Si può mostrare, con le notazioni di prima, che $f_{\#}(\mathcal{R}^k(U)) \subset \mathcal{R}^k(V)$.

Ricordiamo ora alcuni teoremi classici. Poiché lavoreremo sempre con correnti definite su tutto \mathbb{R}^n ne daremo l'enunciato solo per questo caso.

Teorema 1.16 (Chiusura). *L'insieme:*

$$\{T \in \mathcal{R}^k(\mathbb{R}^n) : \text{spt } T \subset B(0, R) \mathbb{M}(T) + \mathbb{M}(\partial T) \leq C\}$$

è sequenzialmente compatto in $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla convergenza debole-*

Teorema 1.17 (Isoperimetrico). *Se $S \in \mathcal{R}^{(k-1)}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto e tale che $\partial S = 0$, allora esiste una $T \in \mathcal{R}^k(\mathbb{R}^n)$ tale che $S = \partial T$ inoltre:*

$$\mathbb{M}(\partial T) \leq C(n, k) (\mathbb{M}(T))^{\frac{k-1}{k}}.$$

Conseguenza di questi due teoremi e della semicontinuità inferiore della massa rispetto alla convergenza debole-* è che, data $S \in \mathcal{R}^{(k-1)}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto, il problema di Plateau:

$$A(S) = \inf\{\mathbb{M}(T) : T \in \mathcal{R}^k(\mathbb{R}^n), \partial T = S\}$$

ammette minimo.

La teoria delle correnti n -dimensionali in \mathbb{R}^n è strettamente legata a quella delle funzioni BV infatti vale:

Teorema 1.18. *Sia $T \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mathbb{M}(\partial T) < \infty$ allora esiste una unica funzione $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che:*

$$\mathcal{L}^n \llcorner f(\varphi) := \int f(x)\psi(x)dx = T(\psi(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

inoltre se $\omega = \sum (-1)^i \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$:

$$\partial T(\omega) = \sum_i \int \omega_i dD_i f$$

quindi $\mathbb{M}(T) = \int |f|$ e $\mathbb{M}(\partial T) = |Df|(\mathbb{R}^n)$. Inoltre $T \in \mathcal{R}^n(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $f \in BV(\Omega; \mathbb{Z})$.

Teorema 1.19 (Costanza). *Sia $T \in \mathcal{D}^n(U)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso, supponiamo che $\partial T = 0$ allora:*

$$T = c \llbracket U \rrbracket$$

Il teorema precedente ci dice che una corrente $T \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}^n)$ di massa finita è univocamente determinata dal suo bordo, infatti se $\partial S = \partial T$ abbiamo che:

$$T = S + c \llbracket \mathbb{R}^n \rrbracket$$

e da $\mathbb{M}(\llbracket \mathbb{R}^n \rrbracket) = \infty$ otteniamo $c = 0$. In particolare se $T \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}^n)$ ha massa finita e $\partial T \in \mathcal{R}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ allora $T \in \mathcal{R}^n(\mathbb{R}^n)$.

Sia $U \subset \Omega$ è un aperto con bordo liscio, u è una mappa propria e regolare e $T \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}^n)$ con massa finita tale che $\partial T = u_{\#} \llbracket \partial U \rrbracket$. Il teorema precedente e la discussione che lo segue implicano che esistono uniche f e T tali che $\partial T = u_{\#} \llbracket \partial U \rrbracket$ e $\mathcal{L}^n \llcorner f = T$. Siccome

$$\partial T = u_{\#} \llbracket \partial U \rrbracket = \partial u_{\#} \llbracket U \rrbracket$$

abbiamo $T = u_{\#} \llbracket U \rrbracket$. Dalla formula di cambiamento di variabile (2.1) abbiamo:

$$\begin{aligned} T(\psi(y)dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) &= u_{\#} \llbracket U \rrbracket (\psi(y)dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) \\ &= \llbracket U \rrbracket (\psi(u(x))du^1 \wedge \dots \wedge du^n) \\ &= \int_U \psi(u(x)) \det D u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \deg(u, U, y) dy \end{aligned}$$

da cui $f = \deg(u, U, y)$.

Enunciamo ora il teorema di White [45], che si rivelerà essere uno strumento fondamentale nel seguito:

Teorema 1.20 (White). Sia $k \geq n \geq 3$ e $f: \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa lipschitziana, allora:

$$\begin{aligned} \min\{\mathbb{M}(T), T \in \mathcal{R}^n(\mathbb{R}^k) \partial T = f_{\#}[\partial B]\} \\ = \inf\left\{\int_B J_n g(x) dx, g: B \rightarrow \mathbb{R}^k, g \text{ lipschitziana}, g \perp \partial B = f\right\} \end{aligned}$$

dove $J_n g = \sqrt{\det Dg^T Dg}$ è il jacobiano n -dimensionale.

Essenzialmente questo teorema ci dice che, per $n \geq 3$, il minimo delle masse delle correnti (sul supporto delle quali non si fanno ipotesi topologiche) è uguale all'estremo inferiore dell'area delle superfici di tipo disco.

Noi useremo il teorema sempre nella forma seguente:

Corollario 1.21. Sia $u: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare dove B è una palla, $n \geq 3$, allora per ogni $\sigma > 0$ esiste una mappa $g: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana tale che $g = u$ su ∂B e:

$$\int_B |\det Dg(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\deg(u, B, y)| dy + \sigma.$$

Dimostrazione. Infatti la discussione che precede il teorema di White ci dice che l'unica corrente $T \in \mathcal{R}^n(\mathbb{R}^n)$ di massa finita e tale che $\partial T = u_{\#}[\partial B]$ è $\mathcal{L}^n \llcorner \deg(u, B, y)$. \square

Mostriamo che il teorema è falso per $n = 2$:

Esempio 1.22. Consideriamo la mappa $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da:

$$\varphi(\vartheta) = \begin{cases} (-1 + 4 \cos \vartheta, \text{sen } 4\vartheta) & \text{se } \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ (1 - 4 \cos \vartheta, \text{sen } 4\vartheta) & \text{se } \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ (-1 + 4 \cos \vartheta, -\text{sen } 4\vartheta) & \text{se } \vartheta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ (1 - 4 \cos \vartheta, -\text{sen } 4\vartheta) & \text{se } \vartheta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

che manda S^1 nella curva ad "otto":

$$\begin{aligned} X = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2: (x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 = 1\} \\ \cup \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2: (x^1 + 1)^2 + (x^2)^2 = 1\} \end{aligned}$$

percorrendo ognuna delle due circonferenze che la compongono una volta in senso orario e una volta in senso antiorario, cosicché $\varphi_{\#}[S^1] = 0$.

Consideriamo $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $g \perp S^1 = \varphi$, allora si vede subito che $\deg(g, B, y) = 0$. Per motivi topologici, si veda [42], l'immagine di g deve ricoprire almeno una volta uno dei dischi $B^{\pm}((\pm 1, 0), 1)$ e poichè $\deg(g, B, y) = 0$, lo ricopre in effetti almeno due volte. Quindi, usando la formula dell'area:

$$0 = \int |\deg(g, B, y)| < 2\pi = \int_{\mathbb{R}^n} N(g, B, y) dy = \int_B |\det Dg(x)| dx$$

Riportiamo infine le formule di area e co-area per mappe lipschitziane. Definiamo:

$$J_n f(x) = \begin{cases} \sqrt{\det Df(x)^T Df(x)} & \text{se } n \leq k \\ \sqrt{\det Df(x) Df(x)^T} & \text{se } n > k \end{cases}$$

dove A^T è la trasposta di A .

Teorema 1.23. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa lipschitziana e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ Borel-misurabile, allora per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile:

1. Formula dell'area. Se $n \leq k$ allora:

$$\int_A g(x) J_n f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) \right) d\mathcal{H}^n(y).$$

2. Formula di coarea. Se $n > k$

$$\int_A g(x) J_n f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{f^{-1}(y) \cap A} g(x) d\mathcal{H}^{n-k} \right) d\mathcal{H}^k(y).$$

Le formule precedenti si generalizzano anche al caso in cui $f: M \rightarrow N$, con M e N insiemi rettificabili, a patto di sostituire Df con $D^M f$, si veda [16].

La formula di coarea la useremo sempre nella forma:

$$\int_A g(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{f^{-1}(y) \cap A} \frac{g(x)}{|Df(x)|} d\mathcal{H}^{n-1} dy$$

dove $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $|Df| > 0$ quasi ovunque.

 IL DETERMINANTE JACOBIANO

2.1 IL DETERMINANTE PER MAPPE DI SOBOLEV

Se $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo allora il determinante jacobiano di u rappresenta la variazione infinitesima di volume dovuta alla deformazione u . Più precisamente la formula di cambiamento di variabile ci dice che:

$$|u(\Omega)| = \int_{\Omega} |\det Du(x)| dx$$

quindi per il teorema della media (supponendo $\det Du(x) > 0$):

$$\det Du(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \det Du = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|u(B(x,r))|}{|B(x,r)|}.$$

Nel seguito di questo capitolo ci proponiamo di stabilire che senso dare a espressioni di questo tipo se u appartiene ad uno spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Innanzitutto il caso in cui u sia regolare ma non iniettiva è trattato dal seguente teorema, facile conseguenza della formula dell'area.

Teorema 2.1 (Cambiamento di variabile). *Sia $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile, allora*

$$\int_{\Omega} g(u(x)) |\det Du(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(u, \Omega, y) dy \quad (2.1)$$

e

$$\int_{\Omega} g(u(x)) \det Du(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \deg(u, \Omega, y) dy \quad (2.2)$$

dove $N(u, \Omega, y) = \#\{u^{-1}(y) \cap \Omega\}$ è la funzione indicatrice di Banach.

Sostanzialmente la prima parte del teorema, con $g(y) = 1_{u(\Omega)}(y)$, ci dice che l'integrale del modulo del determinante conta in valore assoluto quante volte l'immagine di u ricopre lo spazio di arrivo, mentre nel secondo caso si tiene conto anche dell'orientazione (ossia se prima ricopriamo in un verso e poi in quello opposto abbiamo un contributo netto nullo). Le formule precedenti si possono generalizzare, si veda [16], anche al caso di funzioni solo approssimativamente differenziabili (ricordiamo che il teorema di Rademacher garantisce che ogni funzione Lipschitziana è quasi ovunque differenziabile) a patto di sostituire $\det Du$ con $\det(apDu)$.

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $p \geq n$ allora una immediata applicazione della disuguaglianza di Hölder ci assicura che $\det Du \in L^1(\Omega)$ e utilizzando la densità delle mappe regolari in $W^{1,p}$ si può mostrare che il determinante jacobiano conserva le stesse proprietà di quello delle funzioni lisce (confronta la discussione all'inizio della sezione 2.2).

Nel caso in cui $p < n$ non solo non vi è nessuna garanzia sulla sommabilità del jacobiano ma, anche nell'eventualità che sia sommabile, si perdono molte delle proprietà peculiari del caso regolare. Infatti sebbene ogni mappa in $W^{1,1}$ sia approssimativamente differenziabile, si veda [26, 46], e quindi, nel caso $\det Du \in L^1_{loc}$, si possano scrivere le formule precedenti; tuttavia si ha una perdita di informazioni nel passaggio al limite.

Esempio 2.2. Consideriamo la ben nota proprietà dell'integrale del determinante jacobiano di essere un *Null Lagrangem* ossia di dipendere esclusivamente dai valori assunti da u sul bordo di Ω , si veda la sezione 2.2, e sia $u(x) = \frac{x}{|x|}$. Allora $u \in W^{1,p}(B(0,1); \mathbb{R}^n)$ per ogni $p < n$, $\det Du(x) = 0$ quasi ovunque, $u = x$ su ∂B ma:

$$0 = \int_B \det Du \neq \int_B \det Id = |B|.$$

Inoltre se consideriamo la seguente successione di mappe:

$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } \frac{1}{k} \leq |x| \leq 1 \\ kx & \text{se } |x| \leq \frac{1}{k} \end{cases} \quad (2.3)$$

si vede facilmente che $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(B)$ ma:

$$|B| = \int_B \det Du_k \rightarrow \int_B \det Du = |0|.$$

2.2 CONTINUITÀ DEI MINORI

Passiamo ora a studiare la continuità del determinante, e più in generale dei minori, del gradiente di u rispetto alla topologia debole di $W^{1,p}$. Senza entrare in alcun dettaglio ricordiamo come tali proprietà siano di fondamentale importanza per lo studio della semicontinuità di funzionali policonvessi, si veda [11].

Fissiamo per prima cosa un po' di notazioni che ci saranno utili anche in seguito. Per ogni matrice $A \in \mathbb{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{I}(h, n)$ definiamo:

- A_j^i l'elemento nella i -esima riga e j -esima colonna di A
- $G_\beta^\alpha(A)$ la sottomatrice di A composta dalle righe e dalle colonne indicizzate rispettivamente da α e β
- $\mathcal{M}_\beta^\alpha(A) = \det G_\beta^\alpha(A)$ il corrispondente minore
- $\mathcal{M}_h(A)$ il vettore di \mathbb{R}^τ con $\tau = \binom{n}{h}^2$ il vettore composto da tutti i minori di ordine h di A

definiamo inoltre $\text{adj } A$, l'aggiunta di A , come l'unica matrice $n \times n$ tale che:

$$(\text{adj } A)A = (\det A)\text{Id}$$

ossia la trasposta della matrice dei cofattori di A :

$$(\text{adj } A)_j^i = (-1)^{i+j} \mathcal{M}_{\hat{n}_i}^{\hat{n}_j}(A) \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

dove $\hat{n}_i = (1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$ è il complementare di i in $(1, \dots, n)$ e, in generale, per ogni $\alpha \in \mathcal{I}(h, n)$ indichiamo con $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{I}(h-1, n)$ il complementare di i in α .

Una veloce applicazione della disugugianza di Hölder ci dice che:

$$\int_\Omega |\mathcal{M}_h(Du)|^{\frac{p}{h}} \leq C(n, h) \int_\Omega |Du|^p. \quad (2.4)$$

Allo stesso modo è possibile mostrare che se $u_k \rightarrow u$ in norma $W^{1,p}(\Omega)$ allora per ogni $h \leq [p]$:

$$\mathcal{M}_h(Du_k) \rightarrow \mathcal{M}_h(Du) \quad (2.5)$$

in norma $L^{\frac{p}{h}}(\Omega)$ dove con $[p]$ indichiamo la parte intera di p .

Passiamo ora a trattare la continuità rispetto alla convergenza debole; l'osservazione, che ci sarà fondamentale, è che ci è possibile

esprimere ogni minore di Du come una divergenza, per prima cosa dimostriamo:

Lemma 2.3. Sia $u \in C^2(\Omega)$ e, allora per ogni $j = 1, \dots, n$ abbiamo:

$$\sum_i \partial_i (\text{adj } Du)_i^j = 0$$

Dimostrazione. Siccome la dimostrazione nel caso generico può sembrare oscura diamo prima la prova nel caso $n = 2$ che mostra come questo lemma sia sostanzialmente equivalente alla nota uguaglianza $\text{rot } Du = 0$:

$$\text{adj } Du = \begin{pmatrix} \partial_2 u^2 & -\partial_1 u^2 \\ -\partial_2 u^1 & \partial_1 u^1 \end{pmatrix}$$

e quindi prendendo ad esempio $j = 1$:

$$\partial_1 (\text{adj } Du)_1^1 + \partial_2 (\text{adj } Du)_2^1 = \partial_1 \partial_2 u^2 - \partial_2 \partial_1 u^2 = 0.$$

Diamo ora la dimostrazione nel caso generico, supponiamo $j = 1$ e consideriamo la $n - 1$ -forma differenziale:

$$\psi = du^2 \wedge \dots \wedge du^n$$

allora dalle proprietà del differenziale esterno si ha immediatamente che $d\psi = 0$. Mostriamo che:

$$d\psi = \left(\sum_i \partial_i (\text{adj } Du)_i^1 \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

infatti, indicando con $S_{\hat{i}}$ l'insieme delle permutazioni di $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \psi &= du^2 \wedge \dots \wedge du^n = \left(\sum_i \partial_i u^2 dx^i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_i \partial_i u^n dx^i \right) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_{n-1}) \in \{1, \dots, n\}^{n-1}} \partial_{i_1} u^2 \dots \partial_{i_{n-1}} u^n dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_{\hat{i}}} (-1)^\sigma \partial_{\sigma(1)} u^2 \dots \partial_{\sigma(n)} u^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \det \frac{\partial(u^2, \dots, u^n)}{\partial(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (\text{adj } Du)_i^1 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} d\psi &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} d((\text{adj } Du)_i^1) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^n \partial_k ((\text{adj } Du)_i^1) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \dots \wedge dx^n \\ &= \left(\sum_i \partial_i (\text{adj } Du)_i^1 \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

la dimostrazione per j generico si fa considerando la forma:

$$\psi = du^1 \wedge \dots \wedge du^{j-1} \wedge du^{j+1} \dots \wedge du^n.$$

□

A questo punto:

$$\begin{aligned}\det Du(x) &= \sum_i \partial_i u^1(x) (\text{adj } Du(x))_i^1 \\ &= \sum_i \partial_i (u^1(x) (\text{adj } Du(x))_i^1) - \sum_i u^1(x) \partial_i ((\text{adj } Du(x))_i^1) \\ &= \text{div}(u^1(x) (\text{adj } Du(x))_i^1)\end{aligned}$$

dove il secondo termine nella seconda espressione è nullo per il lemma 2.3, più in generale:

$$\det Du(x) = \text{div}(u^j(x) (\text{adj } Du(x))_i^j)$$

e mediando questa espressione per $i = 1, \dots, n$ si ottiene:

$$\det Du(x) = \frac{1}{n} \text{div}(\sum_j u^j(x) (\text{adj } Du(x))_i^j) = \frac{1}{n} \text{div}(u(x) \text{adj } Du(x)). \quad (2.6)$$

Analogamente si prova che per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{I}(h, n)$ si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\beta^\alpha(Du) &= \sum_{i \in \beta} \partial_i (u^{\alpha_j} \text{adj } G_\beta^\alpha(Du)) = \\ &= \sum_{i \in \beta} (-1)^{i+j} \partial_i (u^{\alpha_j} \mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du))\end{aligned} \quad (2.7)$$

Osserviamo che queste identità sono state scritte per mappe di classe C^2 ma per densità possono essere estese a mappe di classe $W^{1,p}$, più precisamente se $h \leq \lfloor p \rfloor$ allora per la (2.5) si ha che la formula (2.7) è valida per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{I}(h, n)$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare:

Teorema 2.4 (Reshetnyak). *Sia $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ debolmente convergente ad u e tale che $\sup \|u_k\|_\infty \leq C$ allora, se p non è intero e $h \leq \lfloor p \rfloor$ si ha che:*

$$\mathcal{M}_h(Du_k) \rightharpoonup \mathcal{M}_h(Du) \quad \text{in } L^{\frac{p}{h}}(\Omega) \quad (2.8)$$

mentre se p è intero, si ha che vale (2.8) per ogni $h \leq p-1$ e per $h = p$:

$$\mathcal{M}_p(Du_k) \xrightarrow{*} \mathcal{M}_p(Du) \quad \text{in } \mathcal{M}(\Omega) \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza (2.4) si ha che la successione $\{\mathcal{M}_h(Du_k)\}$ è equilimitata in $L^{\frac{p}{h}}(\Omega)$ quindi ammette un sottosuccessione convergente debolmente in $L^{\frac{p}{h}}$ se $h < p$ o debole-* in $\mathcal{M}(\Omega)$ se $p = h$. Basta allora dimostrare che il limite è proprio $\mathcal{M}_h(Du)$; la tesi segue poi dall'indipendenza del limite dalla sottosuccessione. Per dimostrare ciò procediamo per induzione su h .

Per $h = 1$ questa è semplicemente la convergenza $Du_k \rightharpoonup Du$. Supponiamolo vero per $h-1$ e mostriamolo per h : siccome la successione dei minori è limitata basta testare la convergenza sulle funzioni $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ e, utilizzando (2.7) si ha, per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{I}(h, n)$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \mathcal{M}_\beta^\alpha(Du_k) &= \sum_{i \in \beta} (-1)^{i+j} \int_\Omega \varphi \partial_i (u^{\alpha_j} \mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du_k)) = \\ &= - \sum_{i \in \beta} (-1)^{i+j} \int_\Omega \partial_i \varphi u_k^{\alpha_j} \mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du_k)\end{aligned}$$

ora per ipotesi induttiva $\mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du_k) \rightharpoonup \mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du)$ in $L^{\frac{p}{h-1}}$ mentre per l'equilimitatezza di $\{u_k\}$ in L^∞ si ha $\partial_i \varphi u_k^{\alpha_j} \rightharpoonup \partial_i \varphi u^{\alpha_j}$ in L^q per ogni $q \in$

$[1, \infty)$, in particolare convergono $L^{\frac{p}{p-(h-1)}}$ e, osservando che $\left(\frac{p}{h-1}\right)' = \frac{p}{p-(h-1)}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} - \sum_{i \in \beta} (-1)^{i+j} \int_{\Omega} \partial_i \varphi u_k^{\alpha_j} \mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du_k) &= - \sum_{i \in \beta} (-1)^{i+j} \int_{\Omega} \partial_i \varphi u^{\alpha_j} \mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du) \\ &= \sum_{i \in \beta} (-1)^{i+j} \int_{\Omega} \varphi \partial_i (u^{\alpha_j} \mathcal{M}_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\beta}_j}(Du)) = \int_{\Omega} \varphi \mathcal{M}_{\beta}^{\alpha}(Du) \end{aligned}$$

e quindi la tesi. \square

Mostriamo ora come la tesi del teorema sia ottimale, ossia che se p è intero non c'è, in generale, speranza di avere convergenza dei minori nella topologia debole di L^1 .

Esempio 2.5. Consideriamo la successione di mappe $u_k: (0,1)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$u_k(x^1, x^2) = \frac{1}{\sqrt{k}}(1-x^2)^k(\cos kx^1, \sin kx^1)$$

abbiamo:

$$Du_k(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{k}(1-x^2)^k \sin kx^1 & -\sqrt{k}(1-x^2)^{k-1} \cos kx^1 \\ \sqrt{k}(1-x^2)^k \cos kx^1 & -\sqrt{k}(1-x^2)^{k-1} \sin kx^1 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$\int_{(0,1)^2} |Du_k|^2 < \frac{2k}{2k-1} < 2$$

e poiché $\|u_k\|_{\infty} \rightarrow 0$ otteniamo $u_k \rightarrow 0$ in $W^{1,2}((0,1)^2)$.

Inoltre $\det Du_k = k(1-x^2)^{2k-1}$ che non converge debolmente L^1 a zero; infatti se scegliamo come funzione test la caratteristica di $(0,1)^2$, abbiamo:

$$\int_{(0,1)^2} \det Du_k(x) = \frac{1}{2}.$$

Tenendo conto della semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole (o della variazione totale rispetto alla convergenza debole-*) si ottiene immediatamente dal teorema 2.4, applicato con $h = n$, la seguente:

Proposizione 2.6 (Semicontinuità). *Sia $p \geq n$ e $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}$ allora:*

$$\int_{\Omega} |\det Du| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k|$$

Mostriamo ora come questo risultato di semicontinuità sia falso se $p < n$ (si veda tuttavia la proposizione 4.2).

Esempio 2.7. Sia $Q = [0,1]^n$ e $u \in C^1(Q; \mathbb{R}^n)$ tale che $\det Du \neq 0$ quasi ovunque in Q .

Utilizzando il lemma 4.17, per ogni $r \in (0,1)$ suddividiamo Q in $n_r = O(\frac{1}{r^n})$ cubetti $Q_r^{(i)}$ di lato $2r$ più $n'_r = O(\frac{n}{r^{n-1}})$ parallelepipedi $P_r^{(i)}$, comunque equivalenti a $[0,2r]^n$ tramite una trasformazione lineare L la cui costante di Lipschitz non dipende da r , e tali che:

$$\sum_{i=1}^{n_r} \int_{\partial Q_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \sum_{i=1}^{n'_r} \int_{\partial P_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{M}{r} \int_Q |Du|^p dx \quad (2.10)$$

se r è abbastanza piccolo.

Definiamo ora una successione di mappe $u_r \in W^{1,p}$ nel modo seguente: su ogni cubetto $Q_r^{(i)}$

$$u_r(x) = u\left(r \frac{x - x_i}{|x - x_i|_{\infty}} + x_i\right)$$

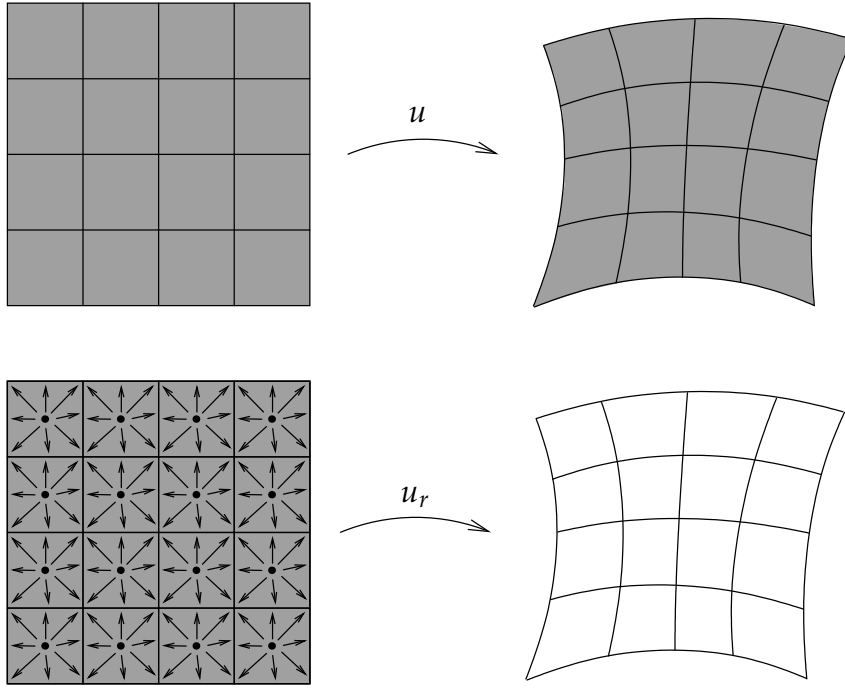


Figura 1: La mappa u_r .

dove x_i è il baricentro dell' i -esimo cubetto e $|x|_\infty = \max\{x^j: j = 1, \dots, n\}$. Analogamente sfruttando la trasformazione L definiamo la mappa sui parallelepipedi¹ $P_r^{(i)}$. Osserviamo che la mappa è ben definita e se $p < n$ si ha, grazie alla formula di coarea:

$$\begin{aligned}
\int_{Q_r^{(i)}} |Du_r|^p &= \int_0^r \int_{\partial Q_\varrho} |D_x(u(r \frac{x-x_i}{|x-x_i|_\infty} + x_i))|^p d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\varrho \\
&\leq Cr^p \int_0^r \int_{\partial Q_\varrho^{(i)}} |Du(r \frac{x-x_i}{|x-x_i|_\infty} + x_i)|^p \frac{1}{|x|^p} d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\varrho \\
&= Cr^p \int_0^r \int_{\partial Q_\varrho^{(i)}} |Du(r\omega + x_i)|^p \frac{1}{\varrho^p} d\mathcal{H}^{n-1}(\omega) d\varrho \\
&\leq Cr^{p-n+1} \int_{\partial Q_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \int_0^r \varrho^{n-p-1} d\varrho \\
&\leq Cr \int_{\partial Q_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Pertanto grazie alla (2.10) si ha che la successione u_r è equilimitata in $W^{1,p}$.

Infine, dalla continuità di u , si ha la convergenza puntuale (uniforme in effetti) di u_r a u . Sia infatti $x \in Q$, $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tale che:

$$\text{osc}_{B(x,\delta)} u < \varepsilon$$

allora, se $r < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$, risulta :

$$|u_r(x) - u(x)| \leq \text{osc}_{Q_r^{(i)}} u < \text{osc}_{B(x,\delta)} u < \varepsilon$$

dove $Q_r^{(i)}$ è il cubetto della partizione che contiene x .

Abbiamo quindi che $u_r \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$. Essendo l'immagine di u_r $(n-1)$ -dimensionale si ha, per la formula dell'area (2.1):

$$\int_Q |\det Du_r| = 0$$

¹ Si veda anche la dimostrazione del teorema 4.25

Quindi, siccome $|\det Du| > 0$:

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \int_Q |\det Du_r| = 0 < \int_Q |\det Du|.$$

Quello che mostra questo esempio è esattamente il tipo di fenomeno che avevamo discusso all'inizio; il determinante jacobiano puntuale delle mappe u_r non tiene in alcun modo conto della "frattura" che abbiamo creato nell'immagine di u .

IL DETERMINANTE DISTRIBUZIONALE

3.1 PRIME PROPRIETÀ ED ESEMPI

Come già osservato, il determinante puntuale per mappe in $W^{1,p}$ con $p < n$ perde molte delle caratteristiche che lo contraddistinguono per mappe regolari. Una possibile soluzione a questo problema deriva dalla formula (2.6) che esprime il determinante come una divergenza e che riportiamo qui in quanto ci sarà fondamentale:

$$\det Du(x) = \frac{1}{n} \operatorname{div} \left(\sum_i u^i(x) (\operatorname{adj} Du(x))_j^i \right) = \frac{1}{n} \operatorname{div}(u(x) \operatorname{adj} Du(x)).$$

Sebbene questa uguaglianza si abbia a priori solo per mappe di classe $W^{1,n}$, il membro di destra risulta essere una distribuzione ben definita anche per mappe con gradiente meno sommabile. Più precisamente per garantire che $u \operatorname{adj} Du$ sia localmente sommabile basta una tra le seguenti condizioni:

1. $u \in W^{1,p}$ con $p \geq \frac{n^2}{n+1}$
2. $u \in W^{1,p} \cap L_{loc}^\infty$ con $p \geq n - 1$.

Nel seguito supporremo, tranne quando esplicitamente detto, di essere sempre nella seconda ipotesi. In entrambi i casi risulta ben definita la distribuzione di ordine minore uguale a uno:

$$\langle \operatorname{Det} Du, \varphi \rangle = -\frac{1}{n} \int_{\Omega} \langle u(x) \operatorname{adj} Du(x), D\varphi(x) \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (3.1)$$

Come già detto, per mappe in $W^{1,p}$ con $p \geq n$ le due nozioni coincidono. Se $p < n$, e quindi in generale non si ha la continuità del determinante rispetto alla convergenza in norma, si ha in generale che $\det Du \neq \operatorname{Det} Du$.

Consideriamo infatti la mappa $u(x) = \frac{x}{|x|}$ allora, come già osservato, $\det Du(x) = 0$ quasi ovunque ma, prendendo la successione di mappe (2.3), si vede facilmente che $\operatorname{Det} Du = \omega_n \delta_0$. Infatti per il teorema 3.1 si ha che:

$$\det Du_k = \omega_n k^n 1_{B(0, \frac{1}{k})} \xrightarrow{*} \omega_n \delta_0 = \operatorname{Det} Du$$

dove la convergenza è da intendersi nel senso delle distribuzioni.

Il seguente teorema stabilisce la continuità dei determinanti distribuzionali rispetto alla convergenza debole:

Teorema 3.1. *Sia $\{u_k\}$ una successione di mappe in $W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_k \rightharpoonup u$, supponiamo $p > n - 1$ e $\sup \|u_k\| \leq C$ oppure $p > \frac{n^2}{n+1}$ allora:*

$$\operatorname{Det} Du_k \xrightarrow{*} \operatorname{Det} Du$$

dove la convergenza è da intendersi nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\sum_j \int_{\Omega} u_k^i (\operatorname{adj} Du_k)_j^i \partial_j \varphi \rightarrow \sum_j \int_{\Omega} u^i (\operatorname{adj} Du)_j^i \partial_j \varphi$$

Dal teorema 2.4 si ha che $\text{adj } Du_k \rightarrow \text{adj } Du$ in $L^{\frac{p}{n-1}}$, inoltre $u_k^i \partial_j \varphi \rightarrow u^i \partial_j \varphi$ in $L^{\frac{p}{p-(n-1)}} = \left(L^{\frac{p}{n-1}}\right)^*$; questo è immediato se $\{u_k\}$ è equilimitata in L^∞ , altrimenti se $p > \frac{n^2}{n+1}$ basta osservare che $\frac{p}{p-(n-1)} < p^* = \frac{np}{n-p}$. A questo punto la tesi segue facilmente. \square

Osserviamo che le ipotesi del teorema sono ottimali, infatti se $p = n - 1$ può venir meno la continuità dei determinanti distribuzionali rispetto alla convergenza debole, confronta l'esempio 4.3, un'altro si può trovare in [10].

Tuttavia è chiaro dalla dimostrazione che se $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}$ con $p \geq n - 1$ e $\sup \|u_k\|_\infty \leq C$ allora:

$$\text{Det } Du_k \xrightarrow{*} \text{Det } Du$$

Esempio 3.2 (Mappe zero-omogenee). Definiamo $u_\psi: B(0,1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ come $u_\psi(x) = \psi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ dove $\psi: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una mappa lipschitziana allora:

$$\text{Det } Du = \delta_0 \int_{\mathbb{R}^n} \text{deg}(w, B, y) dy$$

dove $w: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi mappa che coincide con ψ su S^{n-1} (ricordiamo che per due mappe di questo tipo abbiamo $\text{deg}(w_1, B, y) = \text{deg}(w_2, B, y)$, confronta la sezione 1.3). Per mostrarlo consideriamo la successione:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{se } \varepsilon < |x| < 1 \\ w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{se } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

allora $u_\varepsilon \rightarrow u_\psi$ in $W^{1,p}$ per ogni $p < n$ e grazie al teorema 3.1 abbiamo che:

$$\det Dv_\varepsilon = \text{Det } Dv_\varepsilon \xrightarrow{*} \text{Det } Du_\psi$$

ma:

$$\det Dv_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \det Dv\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) 1_{B(0,\varepsilon)}(x)$$

da cui se $\varphi \in \mathcal{D}(B)$ si ha:

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) \det Dv_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi(x) \det Dw\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \int_{B(0,1)} \varphi(\varepsilon x) \det Dw(x) dx \rightarrow \varphi(0) \int_{B(0,1)} \det Dw \end{aligned}$$

da cui, grazie alla formula dell'area (2.2):

$$\text{Det } Du_\psi = \delta_0 \int_{B(0,1)} \det Dw(x) dx = \delta_0 \int_{\mathbb{R}^n} \text{deg}(w, B, y) dy.$$

Possiamo interpretare l'integrale che compare a moltiplicare la delta come l'area racchiusa da $\psi(S^{n-1})$ contando segno e molteplicità. In particolare se $\psi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ allora $\text{Det } Du = (\omega_n \text{deg } \psi) \delta_0$.

Esempio 3.3. Questo esempio mostra invece che non necessariamente $\text{Det } Du$ è una misura di Radon, ossia una distribuzione di ordine 0, consideriamo infatti $Q = [-2\pi, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$ e definiamo (vedi figura 2):

$$v(x, y) = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{\pi y}{x+\pi}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi y}{x+\pi}\right)\right) & \text{se } |y| \leq x + \pi \text{ e } -\pi < x \leq 0 \\ \left(\cos\left(\frac{\pi y}{\pi-x}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi y}{\pi-x}\right)\right) & \text{se } |y| \leq \pi - x \text{ e } 0 \leq x < \pi \\ (-1, 0) & \text{altrove in } Q \end{cases}$$

Pertanto v è costante fuori da $\{|y| + |x| \leq \pi\}$ e per ogni $p < 2$ si ha:

$$\int_Q |Dv|^p = C_p < \infty$$

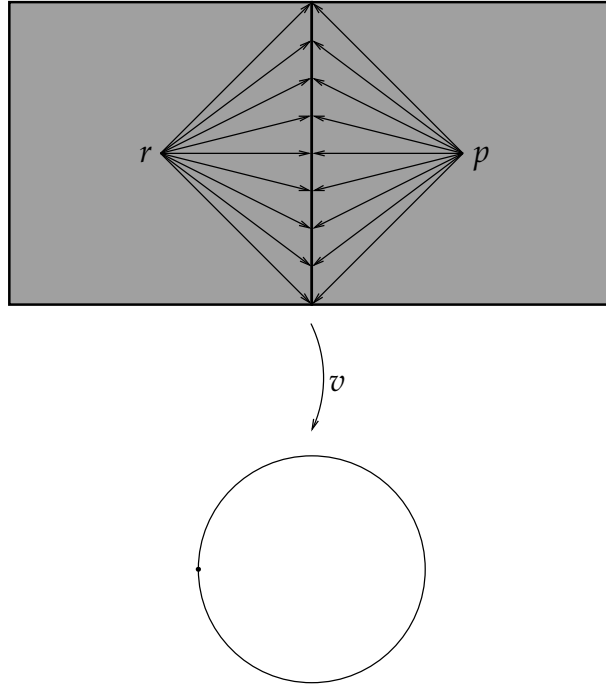


Figura 2: La mappa v

inoltre, ragionando come nell'esempio precedente, si verifica che vale $\text{Det } Dv = \omega_n \delta_{-\pi} + \omega_n \delta_{\pi}$. Consideriamo ora $v_\varepsilon: \varepsilon Q \rightarrow \mathbb{S}^1$, $v_\varepsilon(x) = v(\frac{x}{\varepsilon})$ allora:

$$\int_{\varepsilon Q} |Dv_\varepsilon|^p = C_p \varepsilon^{2-p}.$$

A questo punto scegliamo $\varepsilon_k = 2^{-\frac{k}{2-p}}$ e $p_k = (x_k^1, 0)$ con $x_k^1 = c\varepsilon_k$ con $c > 0$ tale che $x_k^1 - x_{k+1}^1 > 2\pi(\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1})$ e definiamo:

$$w(x) = \begin{cases} v_{\varepsilon_k}(x - p_k) & \text{se } x \in p_k + \varepsilon_k Q \\ (-1, 0) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Siccome v_ε è costante fuori da εQ , w è ben definita e sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ se $p < 2$; inoltre, sfruttando la continuità del determinante distribuzionale, si ha:

$$\text{Det } Dw = \omega_n \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_{r_k} - \delta_{q_k})$$

con $r_k = p_k - (\pi\varepsilon_k, 0)$ e $q_k = p_k + (\pi\varepsilon_k, 0)$, che si verifica immediatamente non essere una misura di Radon.

Abbiamo appena visto come il determinante distribuzionale non sia in generale una misura. Tuttavia le mappe che godono di tale proprietà sono di particolare importanza. Questa classe di funzioni, introdotta in [29] e studiata in [13, 14] in un contesto leggermente diverso, ha infatti proprietà simili a quelle delle funzioni BV . Diamo pertanto la seguente definizione:

Definizione 3.4 (BnV). Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ diremo che u è a *variazione n-esima limitata* e scriveremo $u \in BnV$ se $\text{Det } Du$ è una misura di Radon in Ω .

Siccome $\text{Det } Du$ è una misura è possibile in accordo al Teorema di Radon-Nykodim decomporla in una parte assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e in una parte singolare. Il seguente teorema, dimostrato in [37], mostra che la parte assolutamente continua di $\text{Det } Du$ è proprio $\det Du$.

Teorema 3.5. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap BnV$, $p > \frac{n^2}{n+1}$ allora $\det Du \in L^1_{loc}$ e:

$$\text{Det } Du = \det Du \, d\mathcal{L}^n + \mu_s \quad \mu_s \perp d\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione. In base al teorema di Radon-Nykodim possiamo scrivere $\text{Det } Du = f \, d\mathcal{L}^n + \mu_s$, basta quindi mostrare che $f = \det Du$ quasi ovunque in Ω .

Considerimo le riscalate:

$$u_r(y) = \frac{u(x_0 + ry) - u(x_0)}{r}$$

allora $u_r(y) \rightarrow v(y) = Du(x_0)y$ in $W^{1,p}(B(0,1))$ per ogni x_0 punto di Lebesgue di u e Du (ossia quasi ovunque in Ω), vedi [46].

Dal teorema 3.1, osservando che $p > \frac{n^2}{n+1}$ si ha che

$$\text{Det } Du_r \xrightarrow{*} \text{Det } Dv = \det Du(x_0).$$

Inoltre sia $\varphi \in \mathcal{D}(B)$ tale che $\int_B \varphi = 1$ allora:

$$\begin{aligned} \langle \text{Det } Du_r, \varphi \rangle &= -\frac{1}{n} \int_B \left\langle \frac{u(x_0 + ry) - u(x_0)}{r} \text{adj } Du(x_0 + ry), D\varphi(y) \right\rangle dy \\ &= -\frac{1}{n} \int_B \left\langle \frac{u(x_0 + ry)}{r} \text{adj } Du(x_0 + ry), D\varphi(y) \right\rangle dy \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{r^n} \int_{B(x_0,r)} \left\langle u(z) \text{adj } Du(z), \frac{1}{r} D\varphi\left(\frac{z - x_0}{r}\right) \right\rangle dz = \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{r^n} \int_{B(x_0,r)} \left\langle u(z) \text{adj } Du(z), D_z \left(\varphi\left(\frac{z - x_0}{r}\right) \right) \right\rangle dz \\ &= \langle \text{Det } Du, \frac{1}{r^n} \varphi\left(\frac{\cdot - x_0}{r}\right) \rangle = (\text{Det } Du)_r(x_0). \end{aligned}$$

Dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\sum_i \partial_i (\text{adj } Du)_i^j = 0$ e la definizione di $(\text{Det } Du)_r$ è data nella sezione 1.2.2. Quindi, ricordando che $(\text{Det } Du)_r(x_0) \rightarrow f(x_0)$ per quasi ogni $x_0 \in \Omega$, vedi la sezione 1.2.2, abbiamo:

$$\begin{aligned} \det Du(x_0) &= \det Du(x_0) \int_B \varphi = \langle \det Du(x_0), \varphi \rangle \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \langle \text{Det } Du_r, \varphi \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} (\text{Det } Du)_r(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

quasi ovunque, da cui la tesi. \square

3.2 MAPPE A VALORI IN SFERE I

Nella sezione precedente abbiamo introdotto il determinante distribuzionale per mappe in $W^{1,p}$, in questa ci concentreremo su mappe a valori in S^{n-1} per le quali si può dare una facile interpretazione geometrica. Risulta infatti che se $u \in BnV \cap W^{1,p}(\Omega; S^{n-1})$ il determinante distribuzionale può essere espresso come una somma finita di delte localizzate nelle "singolarità essenziali" della mappa u . Queste rappresentano, infatti, l'unica ostruzione topologica all'approssimazione di u con mappe lisce a valori in S^{n-1} (si veda [2, 5], il teorema 4.19 e la discussione che lo segue).

La proprietà fondamentale di cui faremo uso nella dimostrazione è espressa dal seguente lemma che lega il grado topologico di u al suo determinante distribuzionale.

Lemma 3.6. Sia $u \in BnV \cap W^{1,p}(\Omega; S^{n-1})$, $p > n - 1$ allora per ogni palla $B(x, r) \subset\subset \Omega$ si ha che:

$$\text{Det } Du(B(x, r)) = \omega_n \text{deg}(u, \partial B(x, r), S^{n-1})$$

inoltre detto $d(x, r) = \deg(u, \partial B(x, r), \mathbb{S}^{n-1})$ si ha che $d(x, \cdot)$ è una funzione in $BV((0, R(x)); \mathbb{Z})$ con $R(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Dimostrazione. Sia:

$$f_\delta(|x|) = \begin{cases} 1 & |x| < r - \delta \\ \frac{r-|x|}{\delta} & r - \delta < |x| < r \\ 0 & |x| > r \end{cases}$$

allora $f_\delta(|y - x|) \nearrow 1_{B(x,r)}$ e quindi per quasi ogni $r \in (0, R(x))$:

$$\begin{aligned} \text{Det } Du(B(x, r)) &= \int_{B(x,r)} d \text{Det } Du = \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \text{Det } Du, f_\delta(|\cdot - y|) \rangle \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} -\frac{1}{n} \int_{B(x,r)} \langle u(y) \text{adj } Du(y), D_y f_\delta(|x - y|) \rangle dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \int_{r-\delta}^r \int_{\partial B(x, \rho)} \frac{1}{\delta} \langle u(y) \text{adj } Du(y), \nu_{\partial B(x, \rho)} \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) d\rho \\ &= \frac{1}{n} \int_{\partial B(x,r)} \langle u(y) \text{adj } Du(y), \nu_{\partial B(x,r)} \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \omega_n \deg(u, \partial B(x, r), \mathbb{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

Dove abbiamo sfruttato l'assoluta continuità di

$$\rho \mapsto \int_{\partial B(x, \rho)} \langle u \text{adj } Du, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$$

e la definizione integrale del grado di Brouwer, vedi la sezione 1.3.

Abbiamo quindi che $d(x, r)$ è ben definita per quasi ogni $r < R(x)$ ed è chiaro che sia a valori in \mathbb{Z} , mostriamo ora che è a variazione limitata. Sia $g(r) \in C_c^1(0, R(x))$ allora:

$$\begin{aligned} - \int_0^R g'(r) d(x, r) dr &= - \int_0^R g'(r) \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} \langle u \text{adj } Du, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} = \\ &= - \frac{1}{n\omega_n} \int_\Omega \langle u(y) \text{adj } Du(y), Dg(|y - x|) \rangle dy = \frac{1}{\omega_n} \langle \text{Det } Du, g(\cdot - x) \rangle. \end{aligned}$$

Siccome $\text{Det } Du$ è una distribuzione di ordine 0 si ha:

$$|\langle d'(x, r), g(r) \rangle| = \frac{1}{\omega_n} |\langle \text{Det } Du, g(|\cdot - x|) \rangle| \leq C \|g\|_\infty$$

da cui $d(x, \cdot) \in BV(0, R(x))$. □

Dimostriamo ora il teorema di struttura per mappe a valori in \mathbb{S}^{n-1} .

Teorema 3.7. *Sia $u \in BnV \cap W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{n-1})$, $p > n - 1$ allora esistono $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \Omega$ e $d_i \in \mathbb{Z}$ tali che:*

$$\text{Det } Du = \omega_n \sum_{i=1}^m d_i \delta_{x_i}$$

dove $d_i = \deg(u, \partial B(x_i, r_i), \mathbb{S}^{n-1})$ con r_i opportunamente piccoli.

Dimostrazione. Per quanto già dimostrato nel lemma 3.6, per ogni $x \in \Omega$, $\deg(u, \partial B(x, r), \mathbb{S}^{n-1})$ è, come funzione di r , a variazione limitata e a valori in \mathbb{Z} , possiamo quindi supporla continua a destra. Pertanto per ogni x esiste un raggio $r(x) > 0$ tale che $d(x, r) = d(x)$ costantemente per $r \leq r(x)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \text{Det } Du(\{x\}) &= \text{Det } Du\left(\bigcap_{r>0} B(x, r)\right) = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Det } Du(B(x, r)) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \omega_n d(x, r) = \omega_n d(x) \end{aligned}$$

e pertanto per ogni $r < r(x)$ si ha

$$\text{Det } Du(B(x, r)) = \omega_n d(x) = \omega_n \deg(u, \partial B(x, r), \mathbb{S}^{n-1}).$$

Consideriamo ora l'insieme V degli $x \in \Omega$ tali che $d(x) = 0$, ossia gli x tali che $\text{Det } Du(\{x\}) = 0$, allora $\text{Det } Du(V) = 0$, infatti consideriamo un aperto $A \supset V$ tale che

$$|\text{Det } Du|(A \setminus V) \leq \varepsilon,$$

l'insieme

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in V, B(x, r) \subset A, r < r(x)\}$$

è un ricoprimento fine di V . Per il teorema di Besicovitch esiste un sotto-ricoprimento numerabile e disgiunto \mathcal{B}' tale che:

$$|\text{Det } Du|(V \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B) = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} & |\text{Det } Du(V) - \text{Det } Du(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B)| \\ & \leq |\text{Det } Du|(V \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B) + |\text{Det } Du|(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \setminus V) \\ & \leq |\text{Det } Du|(A \setminus V) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

e pertanto

$$\text{Det } Du(V) = \text{Det } Du(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B) = 0.$$

Siccome $\text{Det } Du$ è una misura di Radon si ha che $U = \Omega \setminus V = \{x : \text{Det } Du(\{x\}) \neq 0\}$ è al più numerabile. Per quanto visto prima

$$\text{Det } Du = \sum_{x \in U} \text{Det } Du(\{x\}) \delta_x = \sum_{x \in U} \omega_n d(x) \delta_x,$$

infine, osservando che $d(x) \in \mathbb{Z}$, si ha in effetti che U è finito e quindi la tesi. \square

LA VARIAZIONE TOTALE

4.1 DEFINIZIONE E PRIME PROPRIETÀ

In questo capitolo analizziamo una seconda possibile definizione di variazione totale del determinante jacobiano per mappe poco somministrabili. La definizione che diamo, introdotta in [30] e studiata in [17, 18, 22, 31, 36, 42], è in accordo con i metodi classici di rilassamento nel Calcolo delle Variazioni che discutiamo brevemente senza alcuna pretesa di completezza e limitandoci al caso autonomo.

Sia $f: \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa:

$$\frac{1}{C}|M|^p \leq f(M) \leq C(1 + |M|^q)$$

e definiamo il funzionale

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} f(Du).$$

Appare chiaro che il funzionale è coercivo rispetto alla topologia debole di $W^{1,p}$ ma è ben definito a priori solo per mappe in $W^{1,q}$. Risulta quindi naturale dare la seguente definizione di funzionale rilassato (che in queste ipotesi è il più grande funzionale semicontinuo inferiormente che sta sotto \mathcal{F}):

$$\overline{\mathcal{F}}(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k, \Omega) \mid u_k \in W^{1,q}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}.$$

Nel nostro caso siamo in una situazione analoga, vorremo definire $\int |\det Du|$ per mappe in $W^{1,p}$ con $p < n$ ma, come già discusso, siamo in grado di definirlo solo per mappe in $W^{1,n}$. Diamo pertanto la seguente definizione:

Definizione 4.1 (Variazione totale). Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiamo:

$$TV_w^p(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| : u_k \in W^{1,n}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}$$

Osserviamo per prima cosa che, per la continuità del determinante rispetto alla norma di $W^{1,n}$, in questa, come nelle successive definizioni, avremmo potuto sostituire a $W^{1,n}$ un qualunque suo sottoinsieme denso rispetto alla topologia forte.

Notiamo anche che manca l'ipotesi di coercività e pertanto, essendo la topologia debole non metrizzabile, non si hanno informazioni sulla semicontinuità di TV . Per questo motivo, ed altri che saranno più chiari in seguito, introduciamo anche :

$$TV_s^p(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| : u_k \in W^{1,n}, u_k \rightarrow u \text{ in } W^{1,p}\}$$

dove la convergenza è rispetto alla topologia forte, che essendo metrica implica la semicontinuità. Definiamo inoltre (vedi il teorema 4.5):

$$TV_{w,loc}^p(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| : u_k \in W_{loc}^{1,n}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}$$

e

$$TV_{s,loc}^p(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| \mid u_k \in W_{loc}^{1,n}, u_k \rightarrow u \text{ in } W^{1,p}\}.$$

Chiaramente si ha

$$TV_{w,loc}^p(u, \Omega) \leq TV_w^p(u, \Omega) \leq TV_s^p(u, \Omega)$$

e

$$TV_{w,loc}^p(u, \Omega) \leq TV_{s,loc}^p(u, \Omega) \leq TV_s^p(u, \Omega).$$

Rimarchiamo che per $p > n - 1$ non siamo a conoscenza di esempi in cui $TV_w^p < TV_s^p$ nè in cui si ha una esplicita dipendenza da p nel calcolo della variazione totale. Più precisamente in tutti gli esempi noti abbiamo che, se $u \in W^{1,p} \cap W^{1,q}$, $TV_w^p = TV_w^q$.

Non siamo tuttavia in grado di dimostrare nè l'uguaglianza tra TV_w e TV_s nè l'indipendenza da p nella definizione di TV ; per $p = n - 1$ invece si confronti l'esempio 4.3.

Perchè le precedenti definizioni siano effettivamente un'estensione della variazione totale del jacobiano bisogna che se $u \in W^{1,n}$ allora $TV^p(u, \Omega) = \int_{\Omega} |\det Du|$; questo per $p > n - 1$ è garantito dal seguente risultato di semicontinuità (confronta esempio 2.7) dimostrato in un contesto più generale in [12].

Proposizione 4.2. *Siano $u_k \in W_{loc}^{1,n}(\Omega)$, $u \in W^{1,n}(\Omega)$ tali che $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}$, $p > n - 1$ allora*

$$\int_{\Omega} |\det Du| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k|$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $\sup \|u_k\|_{\infty} \leq C$, allora dal teorema 3.1 si ha:

$$\text{Det } Du_k \xrightarrow{*} \text{Det } Du$$

e osservando che se $u \in W_{loc}^{1,n}$ si ha $\det Du = \text{Det } Du$ otteniamo per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int \varphi \det Du &= \langle \text{Det } Du, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \text{Det } Du_k, \varphi \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi \det Du_k \leq \|\varphi\|_{\infty} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |\det Du_k| \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |\det Du_k|. \end{aligned}$$

Passando al sup per $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$ si ha la tesi nel caso in cui la successione sia equilimitata in L^{∞} .

Per dimostrare il caso generale definiamo, per ogni $N \in \mathbb{N}$:

$$\pi_N(x) := \begin{cases} x & x \in B(0, N) \\ N \frac{x}{|x|} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Detta $v_k^N(x) = \pi_N(u_k(x))$, si ha chiaramente che $v_k^N \in W_{loc}^{1,n}(\Omega)$, $v_k^N \rightarrow u^N := \pi_N(u)$ in $W^{1,p}$ e inoltre

$$|\det Dv_k^N(x)| = |\det Du_k(x)| 1_{\{|u_k| > N\}}(x)$$

da cui:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int |\det Dv_k^N| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |\det Du_k|.$$

Per la prima parte della dimostrazione abbiamo quindi che:

$$\int |\det Du^N| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |\det Dv_k^N| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |\det Du_k|$$

Osservando che $u^N \rightarrow u$ forte in $W^{1,n}$ la tesi nel caso generale segue passando al limite per $N \rightarrow \infty$ e applicando il Teorema di Lebesgue. \square

Osserviamo che a differenza dell'esempio 2.7 la semicontinuità rispetto alla topologia debole in $W^{1,p}$ con $p < n$ si ha solo considerando una successione di mappe più regolari che convergono ad u .

Esempio 4.3. Mostriamo ora come per $p = n - 1$ si possa avere che $TV_w^p < TV_s^p$. Scegliamo $n = 2$ e consideriamo la mappa $u: B(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$, $u(\varrho, \vartheta) = e^{i\vartheta}$ e la successione di mappe:

$$u_\alpha(\varrho, \vartheta) = \begin{cases} e^{i\vartheta} & \text{se } \vartheta \in [\alpha, 2\pi] \\ e^{-i\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}\vartheta} & \text{se } \vartheta \in [0, \alpha] \end{cases}$$

allora si ha che $u_\alpha: B(0,1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus V(\alpha)$ dove $V(\alpha) = \{e^{it} : t \in (0, \alpha)\}$ e quindi:

$$C(\alpha) = \{u \neq u_\alpha\} = \{(\varrho, \vartheta) : 0 \leq \varrho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \alpha\}$$

da cui immediatamente $u_\alpha \rightarrow u$ in L^p per ogni $p < \infty$ se $\alpha \rightarrow 0$, inoltre:

$$\int_B |Du_\alpha|^p \leq 2^{p-1} \left\{ \int_B |Du|^p + \int_{C(\alpha)} |Du_\alpha|^p \right\}$$

l'ultimo integrale si stima con:

$$\int_{C(\alpha)} |Du_\alpha|^p \leq \int_0^1 \int_0^\alpha \left(\frac{1}{\alpha^p}\right) \frac{1}{\varrho} \varrho d\vartheta d\varrho = \alpha^{1-p}$$

quindi abbiamo che $u_\alpha \rightarrow u$ solo in $W^{1,1}$. Essendo l'immagine di u_α contenuta in $\mathbb{S}^1 \setminus V(\alpha)$ utilizzando la proiezione stereografica e i risultati di approssimazione in $W^{1,1}(B; \mathbb{R})$ possiamo trovare una mappa liscia v_α a valori in \mathbb{S}^1 per cui:

$$\|u_\alpha - v_\alpha\|_{W^{1,1}(B; \mathbb{R}^2)} \leq \alpha.$$

Quindi $v_\alpha \rightarrow u$, inoltre, essendo le v_α con immagine 1-dimensionale (vedi figura 3):

$$\int_B |\det Dv_\alpha| = 0$$

e quindi $TV_w^1(u, B) = 0$.

Per mostrare che $TV_s^1(u, B) > 0$ basta osservare che se $u_k \rightarrow u$ forte in $W^{1,1}$ abbiamo che $\text{adj } Du_k \rightarrow \text{adj } Du$ forte in L^1 e poichè, troncando la successione approssimante, possiamo supporre che $\|u_k\|_\infty$ siano equilimitate otteniamo quindi, confronta la discussione dopo la dimostrazione del teorema 3.1:

$$\det Du_k \xrightarrow{*} \text{Det } Du$$

in $\mathcal{M}(B)$ pertanto:

$$\pi = |\text{Det } Du|(B) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B |\det Du_k|$$

da cui $TV_s^1(u, \Omega) \geq \pi$.

4.2 DIPENDENZA DI TV DAL DOMINIO

In questa sezione ci proponiamo di studiare $TV^p(u, \Omega)$ come funzione del dominio, dimostrando i seguenti teoremi, tratti da [21]:

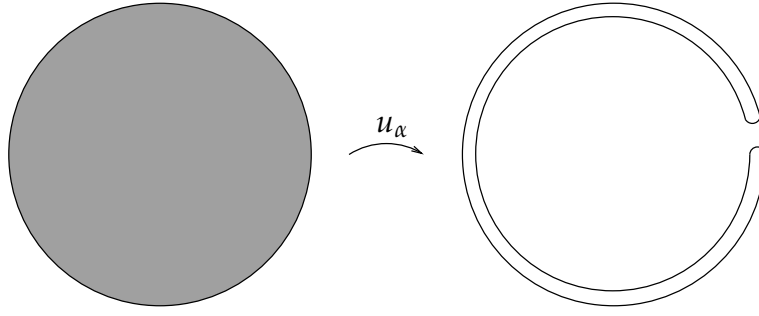


Figura 3: La mappa u_α

Teorema 4.4. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > n - 1$ tale che $TV_w^p(u, \Omega) < \infty$ allora esiste una misura di Radon μ su $\bar{\Omega}$ tale che per ogni aperto $U \subset \Omega$ si ha:

$$\mu(U) \leq TV_w^p(u, U) \leq \mu(\bar{U})$$

Teorema 4.5. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > n - 1$ tale che $TV_{w,loc}^p(u, \Omega) < \infty$ allora esiste una misura di Radon λ su Ω tale che per ogni aperto $U \subset \Omega$ si ha:

$$\lambda(U) = TV_{w,loc}^p(u, U).$$

Osservazione 4.6. Premettiamo alla dimostrazione dei teoremi alcune osservazioni. Innanzi tutto valgono due teoremi analoghi per TV_s^p e $TV_{s,loc}^p$, come risulterà chiaro dalla dimostrazione, in secondo luogo utilizzare funzioni in $W_{loc}^{1,n}$ nella definizione del rilassato porta a un risultato migliore essenzialmente perchè si evitano problemi di accumulazione sul bordo di Ω , confronta esempio 4.7. Infatti osserviamo che se $U \subset\subset V \subset \Omega$:

$$TV_{w,loc}^p(u, U) \leq TV_w^p(u, U) \leq TV_{w,loc}^p(u, V)$$

da cui $\lambda(U) = \mu(U)$ per ogni aperto $U \subset\subset \Omega$ e quindi, per approssimazione, $\lambda = \mu \llcorner \Omega$. La stessa osservazione ovviamente vale per TV_s^p e $TV_{s,loc}^p$.

Esempio 4.7. Sia $u(x) = \frac{x}{|x|}$, $U = B(0,1) \setminus \{0\}$ e $\mu = \omega_n \delta_0$ allora, confronta la sezione 4.4, si ha che

$$TV_w^p(u, B) = TV_w^p(u, U) = \omega_n = \mu(\bar{U}) > \mu(U)$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che $W^{1,n}(B) = W^{1,n}(U)$. Si verifica invece facilmente che se $\mu(\partial V) = 0$ allora $TV_w^p(u, V) = \mu(V)$ da cui μ è la misura dell'enunciato del teorema 4.4.

La dimostrazione dei teoremi 4.4 e 4.5 si basa su alcuni lemmi. Il primo, per la cui dimostrazione rimandiamo a [21], ci permette di ricordare due funzioni differenti controllando l'incremento di energia.

Lemma 4.8. Sia $n - 1 < p < n$ $V \subset\subset \Omega$ e W aperti tali che $\Omega = V \cup W$ e siano $v \in W^{1,n}(V)$ e $w \in W^{1,n}(W)$ allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ esistono due aperti $V' \subseteq V$ e $W' \subseteq W$ tali che $\Omega = V' \cup W'$ e una funzione $z \in W^{1,n}(\Omega)$ con $z = v$ su $\Omega \setminus W'$ e $z = w$ su $\Omega \setminus V'$ tali che:

$$|W' \cap V'| \leq \frac{C}{m}$$

$$\|z\|_{W^{1,n}(V' \cap W')} \leq \frac{C}{m^\tau} \left(\|w\|_{W^{1,p}(V \cap W)} + \|v\|_{W^{1,p}(V \cap W)} + m \|w - v\|_{L^p(V \cap W)} \right)$$

dove $C = C(p, n, V, W)$ e $\tau = \tau(n, p) > 0$.

Osserviamo che la costante che appare nel lemma è circa $C \sim \frac{1}{\text{dist}(\partial V, \partial W)}$ e quindi la stima è tanto peggiore tanto più l'intersezione dei due aperti è piccola.

A questo punto possiamo dimostrare la sub-additività di TV :

Lemma 4.9. *Siano $V \subset\subset \Omega$ e W aperti tali che $\Omega = V \cup W$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $n - 1 < p < n$ allora:*

$$TV_w^p(u, \Omega) \leq TV_w^p(u, V) + TV_w^p(u, W)$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare due successioni $\{v_k\} \subset W^{1,n}(V)$ e $\{w_k\} \subset W^{1,n}(W)$ tali che:

1. $v_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(V)$
2. $w_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(W)$
3. $\|u - v_k\|_{L^p(V)} \leq \frac{1}{k}$
4. $\|u - w_k\|_{L^p(W)} \leq \frac{1}{k}$
5. $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_V |\det Dv_k| \leq TV_w^p(u, V) + \varepsilon$
6. $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_W |\det Dw_k| \leq TV_w^p(u, W) + \varepsilon.$

Grazie al lemma precedente per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono due insiemi $V_k \subset V$ e $W_k \subset W$ e una funzione $z_k \in W^{1,n}(\Omega)$ che coincide con v_k su $\Omega \setminus W_k$ e con w_k su $\Omega \setminus V_k$ che verificano:

$$|W_k \cap V_k| \leq \frac{C}{k}$$

$$\|z_k\|_{W^{1,n}(V_k \cap W_k)} \leq \frac{C}{k^\tau} \left(\|w_k\|_{W^{1,p}(V \cap W)} + \|v_k\|_{W^{1,p}(V \cap W)} + k \|w_k - v_k\|_{L^p(V \cap W)} \right) \leq Ck^{-\tau}.$$

Si ha quindi per la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |z_k - u|^p \\ & \leq C \left(\int_W |w_k - u|^p + \int_V |v_k - u|^p + \int_{V_k \cap W_k} |u|^p + \int_{V_k \cap W_k} |z_k|^p \right) \\ & \leq C \left(\frac{2}{k} + \int_{V_k \cap W_k} |u|^p + |V_k \cap W_k|^{1-\frac{p}{n}} \|z_k\|_{W^{1,n}(V_k \cap W_k)}^p \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Analogamente si prova che $\sup \|z_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$ e che pertanto $z_k \rightarrow u$ (osserviamo a futura memoria che se $v_k \rightarrow u$, $w_k \rightarrow u$ nella norma $W^{1,p}$ allora anche $z_k \rightarrow u$ forte). Inoltre:

$$\int_{\Omega} |\det Dz_k| \leq \int_V |\det Dv_k| + \int_W |\det Dw_k| + \int_{V_k \cap W_k} |Dz_k|^n$$

e, ricordando che $\int_{V_k \cap W_k} |Dz_k|^n = O(k^{-n\tau})$, passando al limite per $k \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene la tesi. \square

La dimostrazione del lemma, come già osservato, si ripete passo passo per gli altri funzionali introdotti ottenendo quindi per tutti la sub-additività rispetto al dominio.

Dimostrazione del teorema 4.4. Consideriamo i funzionali perturbati:

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, \Omega) = \int_{\Omega} |\det Du| + \varepsilon \int_{\Omega} |Du|^p$$

e il rilassato:

$$\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k, \Omega) \mid u_k \in W^{1,p}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}$$

è chiaro che $TV_p(u, \Omega) < \infty$ se e solo se $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon(u, \Omega) < \infty$, inoltre essendo la topologia debole di $W^{1,p}$ metrizzabile sui limitati esiste una successione $\{u_k\} \subset W^{1,p}$, $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$ e tale che $\mathcal{F}_\varepsilon(u_k, \Omega) \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_\varepsilon(u, \Omega)$.

Esiste quindi una misura di Radon μ_ε su $\overline{\Omega}$ tale che $(|\det Du_k| + \varepsilon|Du_k|^p)d\mathcal{L}^n \xrightarrow{*} \mu_\varepsilon$. Inoltre se $\{z_k^\delta\}$ è ammissibile e tale che:

$$TV_w^p(u, \Omega) \leq \int_\Omega |\det Dz_k^\delta| + \delta$$

si ha:

$$\mu_\varepsilon(\overline{\Omega}) = \overline{\mathcal{F}}_\varepsilon(u, \Omega) \leq TV_w^p(u, \Omega) + \varepsilon \sup_k \int_\Omega |Dz_k^\delta|^p + \delta \leq C$$

e pertanto esiste una successione $\varepsilon_h \rightarrow 0$ e una misura di Radon μ tale che $\mu_{\varepsilon_h} \xrightarrow{*} \mu$. Se $U \subset \Omega$ è aperto abbiamo, passando al limite prima in k e poi in h :

$$\begin{aligned} TV(u, U) &\leq \limsup_{h \rightarrow \infty} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_h}(u_k, U) \\ &\leq \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_{\varepsilon_h}(\overline{U}) \leq \mu(\overline{U}). \end{aligned}$$

Inoltre essendo $\overline{\Omega}$ aperto relativamente alla topologia indotta:

$$\begin{aligned} \mu(\overline{\Omega}) &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_{\varepsilon_h}(\overline{\Omega}) = \liminf_{h \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon_h}(u, \Omega) \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} (TV_w^p(u, \Omega) + \varepsilon_h \sup_k \int_\Omega |Dz_k^\delta|^p + \delta) \leq \mu(\overline{\Omega}) + \delta \end{aligned}$$

e quindi, al limite in $\delta \rightarrow 0$, $TV_w^p(u, \Omega) = \mu(\overline{\Omega})$.

Ora se U è aperto esiste un aperto $V \subset\subset U$ tale che:

$$\mu(U) \leq \mu(V) + \sigma$$

e quindi, usando il lemma precedente:

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq \mu(V) + \sigma = \mu(\overline{\Omega}) - \mu(\overline{\Omega} \setminus V) + \sigma \\ &\leq TV_w^p(u, \Omega) - TV_w^p(u, \Omega \setminus \overline{V}) + \sigma \leq TV_w^p(u, U) + \sigma \end{aligned}$$

e al limite per $\sigma \rightarrow 0$ dimostriamo l'ultima affermazione che ci rimaneva da provare. \square

Rimarchiamo ancora una volta che la stessa dimostrazione vale per gli altri funzionali rilassati da noi introdotti (nel caso della topologia forte neanche non importa considerare i funzionali perturbati).

Dimostrazione del teorema 4.5. Per dimostrare il teorema basta far vedere che se λ è la misura della tesi del teorema 4.4 allora per ogni aperto U :

$$TV_{w,loc}^p(u, U) \leq \lambda(U).$$

Per comodità di notazione nel seguito indicheremo $TV_{w,loc}^p(u, A)$ semplicemente con $TV(A)$ essendo u e p fissati.

Consideriamo una volta ancora i funzionali perturbati:

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, \Omega) = \int_\Omega F_\varepsilon(Du)$$

dove $F_\varepsilon(M) = |\det M| + \varepsilon|M|^p$ e il rilassato:

$$\overline{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k, \Omega) : u_k \in W_{loc}^{1,n}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}.$$

Sia infine λ_ε la misura che lo rappresenta nel senso del teorema 4.4.

Consideriamo una successione di aperti con bordo regolare $U_h \subset \subset U$ tali che $U_h \nearrow U$ e $\lambda_\varepsilon(\partial U_h) = 0$. Mostriamo per prima cosa che per ogni m :

$$\overline{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U \setminus \overline{U}_m) \leq C\lambda_\varepsilon(U \setminus \overline{U}_{m-1}).$$

Per ogni h possiamo trovare una successione $u_{h,k} \in W_{loc}^{1,n}(U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1})$ e tale che:

1. $u_{h,k} \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1})$ per $k \rightarrow \infty$
2. $\int_{U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}} F_\varepsilon(Du_{h,k}) \leq \overline{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}) + 2^{-h}$
3. $\|u_{h,k} - u\|_{L^p} \leq a_h 2^{-(h+k)}$, con a_h una costante da scegliere in seguito.

Inoltre essendo i funzionali $\mathcal{F}_{loc,\varepsilon}$ coercivi si ha che:

$$\begin{aligned} & \sup_h \sup_k \int_{U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}} |Du_{h,k}|^p \leq \\ & \sup_h \sup_k \frac{1}{\varepsilon} \int_{U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}} F_\varepsilon(Du_{h,k}) \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_h \overline{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}) + 2^{-h} \\ & \leq \frac{C}{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(\Omega) < \infty. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Per il lemma 4.8, per ogni $h, k \in \mathbb{N}$, esistono due aperti $V_{h+1,k}^- \subset U_{h+2} \setminus \overline{U}_h$ e $V_{h,k}^+ \subset U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}$ tali che $V_{h,k}^+ \cup V_{h+1,k}^- = U_{h+2} \setminus \overline{U}_{h-1}$

$$|V_{h,k}^+ \cap V_{h+1,k}^-| \leq C_h a_h 2^{-(h+k)}$$

e una funzione $z_{h,k} \in W_{loc}^{1,n}(U_{h+2} \setminus \overline{U}_{h-1})$ che coincide con $u_{h+1,k}$ su $(U_{h+2} \setminus \overline{U}_h) \setminus V_{h,k}^+$ e con $u_{h,k}$ su $(U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}) \setminus V_{h+1,k}^-$ e tale che:

$$\begin{aligned} & \int_{V_{h,k}^+ \cap V_{h+1,k}^-} |Dz_{h,k}|^n \\ & \leq C_h 2^{-n(h+k)\tau} \left\{ \|u_{h,k}\|_{W^{1,p}(U_{h+1} \setminus \overline{U}_h)} + \|u_{h,k}\|_{W^{1,p}(U_{h+1} \setminus \overline{U}_h)} \right. \\ & \left. + 2^{h+k} \|u_{h+1,k} - u\|_{L^p(U_{h+1} \setminus \overline{U}_h)} \right\}^n \leq C_h a_h 2^{-n(k+h)\tau} \end{aligned}$$

dove C_h è una costante che dipende solo dagli aperti $U_{h+2} \setminus \overline{U}_h$ e $U_{h+1} \setminus \overline{U}_{h-1}$. Scegliamo ora a_h in modo che $C_h a_h \leq 1$ per ogni h . Definiamo z_k in come $z_{h,k}$ su $U_h \setminus \overline{U}_{h-1}$ si vede facilmente che questa è una buona definizione e poiché ogni compatto $V \subset \subset U$ interseca solo un numero finito di U_h si ha che $z_k \in W_{loc}^{1,n}(U \setminus U_0)$ ¹. Inoltre grazie alla (4.1) si ha che $z_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$.

Abbiamo:

¹ Osserviamo anche che non si può avere di meglio ossia anche supponendo che $u_{h,k}$ siano in $W^{1,n}$ non essendo le loro norme limitate il meglio che otteniamo è che $|Dz_k|^n$ è solo localmente sommabile

$$\begin{aligned}
\int_{U \setminus \bar{U}_m} F_\varepsilon(Dz_k) &\leq \sum_{h=m}^{\infty} \int_{U_{h+2} \setminus \bar{U}_h} F_\varepsilon(Dz_k) \\
&\leq \sum_{h=m}^{\infty} \left\{ \int_{U_{h+2} \setminus \bar{U}_h} F_\varepsilon(Du_{h+1,k}) + \int_{U_{h+1} \setminus \bar{U}_{h-1}} F_\varepsilon(Du_{h,k}) \right. \\
&\quad \left. + c \int_{V_{h,k}^+ \cap V_{h+1,k}^-} |Dz_{h,k}|^n \right\} \\
&\leq \sum_{h=m}^{\infty} \left\{ \bar{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U_{h+2} \setminus \bar{U}_h) + \bar{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U_{h+1} \setminus \bar{U}_{h-1}) + 2^{-h+1} + c2^{-n(k+h)\tau} \right\} \\
&\leq \sum_{h=m}^{\infty} \left\{ 2\bar{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U_{h+2} \setminus \bar{U}_{h-1}) + 2^{-m+1} + c2^{-\tau n(k+m)} \right\} \\
&\leq \sum_{h=m}^{\infty} 2\lambda_\varepsilon(\overline{U_{h+2} \setminus U_{h-1}}) + 2^{-m+1} + c2^{-n\tau k} \\
&= \sum_{h=m}^{\infty} 2\lambda_\varepsilon(U_{h+2} \setminus U_{h-1}) + 2^{-m+1} + c2^{-kn\tau} \\
&\leq 6\lambda_\varepsilon(U \setminus U_{m-1}) + 2^{-m+1} + c2^{-kn\tau}.
\end{aligned}$$

Quindi $\bar{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U \setminus \bar{U}_m) \leq C\lambda_\varepsilon(U \setminus U_{m-1})$ per ogni m e pertanto:

$$\begin{aligned}
TV(U) &\leq TV(U_{m+1}) + TV(U \setminus \bar{U}_m) \\
&\leq \lambda(\bar{U}_{m+1}) + \bar{\mathcal{F}}_{loc,\varepsilon}(U \setminus \bar{U}_m) \leq \lambda(U) + C\lambda_\varepsilon(U \setminus U_{m-1})
\end{aligned}$$

e al limite per $U_m \nearrow U$ si ottiene $TV(U) \leq \lambda(U)$. \square

Infine, in [7], è stata caratterizzata la parte assolutamente continua di λ :

Teorema 4.10. *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $n-1 < p$ e λ la misura della tesi del teorema 4.5 allora:*

$$\lambda = |\det Du| d\mathcal{L}^n + \lambda_s \quad \text{con} \quad \lambda_s \perp d\mathcal{L}^n$$

4.3 LA VARIAZIONE TOTALE E IL DETERMINANTE DISTRIBUZIONALE

Passiamo ora a studiare l'argomento principale di questa tesi, ossia il confronto tra la variazione totale e il determinante distribuzionale.

Nel seguito supponiamo sempre $n-1 < p < n$ e $u \in W^{1,p} \cap L_{loc}^\infty$, in queste ipotesi la prima osservazione è che se $TV_{w,loc}^p(u, \Omega) < \infty$ allora $u \in BnV$. Infatti sia u_k una successione di mappe in $W^{1,n}$ che convergono debolmente ad u e tali che:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| \leq TV_{w,loc}^p(u, \Omega) + \delta$$

allora, a meno di sottosuccessioni, $\det Du_k d\mathcal{L}^n \xrightarrow{*} \mu$ per qualche misura di Radon μ ma, dal teorema 3.1, si ha immediatamente che $\mu = \text{Det } Du$ inoltre, per la semicontinuità della variazione totale, per ogni aperto A :

$$|\text{Det } Du|(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A |\det Du_k| \quad (4.2)$$

e quindi $|\text{Det } Du|(\cdot) \leq TV(u, \cdot)$. Osserviamo che in generale non vale l'uguaglianza, confronta esempio 4.13.

Mostriamo ora alcune tecniche, tratte da [42], per determinare $TV(u, \Omega)$ nel caso di mappe zero-omogenee per le quali possiamo ridurci ad un problema di Plateau.

Teorema 4.11. Sia $B = B(0, 1)$ la palla unitaria, $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa lipschitziana, e $u: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $u(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ allora:

$$\begin{aligned} TV_{w,loc}(u, B) &= TV_w(u, B) = TV_s(u, B) \\ &= \inf \left\{ \int_B |\det Dw| \mid w \text{ lipschitziana, } w = \varphi \text{ su } \mathbb{S}^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Chiamiamo m l'estremo inferiore che compare nella tesi e sia w lipschitziana tale che:

$$\int_B |\det Dw| \leq m + \varepsilon$$

definiamo:

$$w_k(x) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{se } \frac{1}{k} \leq |x| \leq 1 \\ w(kx) & \text{se } |x| \leq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Allora w_k è ben definita e

$$\int_B |\det Dw_k| = k^n \int_{B(0, \frac{1}{k})} |\det Dw(kx)| dx = \int_B |\det Dw|$$

inoltre, per $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_B |Du - Dw_k|^p &\leq C \left(\int_{B(0, \frac{1}{k})} |Du|^p + k^p \int_{B(0, \frac{1}{k})} |Dw(kx)|^p \right) \\ &\leq C (o(1) + \text{Lip}(w)k^{p-n}) = o(1). \end{aligned}$$

Quindi $TV_s^p \leq m$. La disuguaglianza $m \leq TV_{w,loc}^p$ è invece conseguenza del lemma 4.12. \square

Lemma 4.12. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e supponiamo che esista un aperto $\Omega_0 \subset \subset \Omega$ tale che $u \in \text{Lip}(\Omega \setminus \overline{\Omega}_0)$ allora:

$$\begin{aligned} &TV_{w,loc}^p(u, \Omega) \\ &= \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| \mid u_k \in W^{1,n}, u_k \rightarrow u \text{ in } W^{1,p}, u_k - u \in W_0^{1,p} \right\} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Ovviamente il secondo membro è sempre maggiore o uguale del primo, basta quindi mostrare la disuguaglianza opposta. Siano $\Omega_0 \subset V \subset \subset W \subset \subset \Omega$ e $u_k \in W_{loc}^{1,n}(\Omega)$ tale che:

1. $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$
2. $\|u_k - u\|_{L^p} \leq \frac{1}{k}$
3. $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\det Du_k| \leq TV_{w,loc}^p(\Omega) + \varepsilon$.

Applicando il lemma 4.8 a $\Omega \setminus \overline{V}$ e W , troviamo, per ogni k , due aperti $A_k \subset W$ e $B_k \subset \Omega \setminus \overline{V}$ tali che $\Omega = A_k \cup B_k$,

$$|A_k \cap B_k| \leq C(V, W)k^{-1}$$

e una funzione z_k che coincide con u su $\Omega \setminus A_k$ e con u_k su $\Omega \setminus B_k$ e per cui:

$$\begin{aligned} \int_{A_k \cap B_k} |Dz_k|^n &\leq C(V, W)k^{-n\tau} \{ \|u\|_{W^{1,p}} + \|u_k\|_{W^{1,p}} + k\|u_k - u\|_{L^p} \} \\ &\leq C(V, W)k^{-n\tau}. \end{aligned}$$

Ovviamente $z_k \in W^{1,n}(\Omega)$, $z_k - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $z_k \rightharpoonup u$ e:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\det Dz_k| &\leq \int_{\Omega \setminus \bar{V}} |\det Du| + \int_{\Omega} |\det Du_k| + \int_{A_k \cap B_k} |Dz_k|^n \\ &\leq \int_{\Omega \setminus \bar{V}} |\det Du| + \int_{\Omega} |\det Du_k| + C(V, W)k^{-n\tau}. \end{aligned}$$

Al limite prima per $k \rightarrow \infty$ e poi per $V \nearrow \Omega$ si ha quindi la tesi. \square

Osservando che le mappe considerate nel precedente teorema sono in $W_{loc}^{1,n}(B \setminus \{0\})$ si vede facilmente che $TV_{w,loc}^p = TV(u, B)\delta_0$ dove:

$$TV(u, B) = \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B |\det Du_k| : u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p} \text{ e } u_k \in W_{loc}^{1,n}\}.$$

Inoltre il teorema precedente ci dice che alla convergenza debole possiamo sostituire quella forte.

Esempio 4.13. Sia $u(x) = \frac{x}{|x|}$ allora, dal teorema 4.15, $TV(u, B) = \omega_n = |\text{Det } Du|(B)$. Consideriamo invece la curva a "otto":

$$X = \{(x^1, x^2) : (x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 = 1\} \cup \{(x^1, x^2) : (x^1 + 1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$$

e sia $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ definita da:

$$\varphi(\vartheta) = \begin{cases} (1 - \cos 2\vartheta, -\sin 2\vartheta) & \text{se } \vartheta \in [0, \pi] \\ (-1 + \cos 2\vartheta, -\sin 2\vartheta) & \text{se } \vartheta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

e $u_\varphi(\varrho, \vartheta) = \varphi(\vartheta)$ la sua estensione zero-omogenea, allora, siccome l'area con segno racchiusa da $\varphi(\mathbb{S}^1)$ è zero, si ha $|\text{Det } Du|(B) = 0$ viceversa mostriamo che $TV(u, B) = 2\pi$. Infatti sia $w: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ lipschitziana e tale che $w \lrcorner \mathbb{S}^1 = \varphi$ si verifica immediatamente che:

$$\deg(w, B, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in B((1, 0), 1) \\ -1 & \text{se } y \in B((-1, 0), 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui, siccome $N(u, B, y) \geq |\deg(w, B, y)|$, si ha grazie a (2.2):

$$\int_B |\det Dw(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} N(u, B, y) dy \geq 2\pi$$

e quindi $TV(u, B) \geq 2\pi$. L'altra disuguaglianza si ha considerando la mappa $v(\varrho, \vartheta) = \varrho\varphi(\vartheta)$ per la quale, sempre grazie a (2.1):

$$\int_B |\det Dv| = 2\pi.$$

Infine, utilizzando la stessa tecnica dell'esempio 3.3, si può costruire una mappa per cui $\text{Det } Du = 0$ e $TV = \infty$.

Per $n \geq 3$ è possibile, grazie al teorema di White, caratterizzare completamente la variazione totale per mappe zero omogenee. IL seguente teorema è un'immediata conseguenza delle tecniche usate in [35, 36]

Teorema 4.14. Sia $n \geq 3$ e $u: B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ con $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana, allora:

$$TV(u, B) = \int_{\mathbb{R}^n} |\deg(w, B, y)| dy$$

dove $w: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una qualunque mappa lipschitziana che coincide con φ su \mathbb{S}^{n-1} .

Osserviamo che in accordo all'esempio 3.2 si ha che:

$$|\text{Det } Du|(B) = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \text{deg}(w, B, y) dy \right|$$

Dimostrazione del teorema 4.14. Basta mostrare che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\text{deg}(w, B, y)| dy = \inf \left\{ \int_B |\det Dv| \mid w \text{ lipschitziana, } v = \varphi \text{ su } \mathbb{S}^{n-1} \right\}. \quad (4.3)$$

Sia v una mappa ammissibile, se w è una qualsiasi altra mappa che coincide con φ su \mathbb{S}^{n-1} , abbiamo:

$$\text{deg}(w, B, y) = \text{deg}(v, B, y)$$

inoltre:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\text{deg}(w, B, y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |\text{deg}(v, B, y)| dy \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} N(v, B, y) dy = \int_B |\text{Det } Dv(x)| dx \end{aligned}$$

quindi il primo membro di (4.3) è sempre minore o uguale del secondo, la disuguaglianza opposta è conseguenza immediata del lemma 1.21. \square

L'esempio 1.22 mostra come questo teorema sia falso in dimensione due.

4.4 MAPPE A VALORI IN SFERE II

In questa sezione mostriamo che per mappe a valori in \mathbb{S}^{n-1} si ha sempre l'uguaglianza tra la variazione totale del determinante distribuzionale e TV .

La strategia che seguiremo sarà quella di ridurci al caso 0-omogeneo per il quale il risultato era stato dimostrato in [42] (si osservi che per $n \geq 3$ è conseguenza del teorema 4.14). Per fare ciò sfruttiamo un lemma dovuto a Bethuel, [6], che ci permette di approssimare la nostra mappa con mappe "essenzialmente" zero-omogenee.

Iniziamo dimostrando il seguente teorema:

Teorema 4.15. *Sia $u: B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ con $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ lipschitziana, allora:*

$$TV(u, B) = |\text{Det } Du|(B) = \omega_n |\text{deg}(\varphi)|$$

La dimostrazione del teorema è conseguenza del seguente lemma:

Lemma 4.16. *Siano $\varphi, \psi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ due mappe lipschitziane. Supponiamo che esiste un'omotopia $H(x, t)$ tale che $H(\cdot, 0) = \varphi(\cdot)$ e $H(\cdot, 1) = \psi(\cdot)$, allora, dette $u_\varphi = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ e $u_\psi = \psi\left(\frac{x}{|x|}\right)$, si ha che:*

$$TV(u_\psi, B) = TV(u_\varphi, B).$$

Dimostrazione. Innanzi tutto possiamo supporre che l'omotopia sia lipschitziana, vedi [42].

Ricordiamo che:

$$TV(u, B) = \inf \left\{ \int_B |\det Dw| : w \text{ lipschitziana, } w = u \text{ su } \mathbb{S}^{n-1} \right\}$$

e sia w una mappa ammissibile e tale che:

$$\int_B |\det Dw| \leq TV(u_\varphi, B) + \varepsilon.$$

Consideriamo:

$$v(x) = \begin{cases} w(2x) & \text{se } x \in B(0, \frac{1}{2}) \\ H(\frac{x}{|x|}, 2|x| - 1) & \text{se } x \in B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

allora chiaramente $v = \psi$ su ∂B e, poiché l'immagine di H è contenuta in \mathbb{S}^{n-1} che ha misura nulla:

$$\begin{aligned} \int_B |\det Dv(x)| dx &= 2^n \int_{B(0, \frac{1}{2})} |\det Dw(2x)| dx \\ &= \int_B |\det Dw(x)| dx \leq TV(u_\varphi, B) + \varepsilon \end{aligned}$$

e pertanto:

$$TV(u_\psi, B) \leq \int_B |\det Dv| \leq TV(u_\varphi, B) + \varepsilon.$$

Quindi $TV(u_\psi, B) \leq TV(u_\varphi, B)$, scambiando i ruoli di u_ψ e u_φ si ottiene la tesi. \square

Dimostrazione del teorema 4.15. Basta dimostrare che

$$TV(u, B) \leq \omega_n |\deg(\varphi)| = |\text{Det } Du|(B).$$

Sia k il grado di φ e sia $\psi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ una mappa lipschitziana di grado k tale che, per ogni $y \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\#\{x \in \mathbb{S}^{n-1}: \psi(x) = y\} = |k|$. Per il Teorema di Hopf, φ e ψ sono omotope e pertanto:

$$TV(u_\varphi, B) = TV(u_\psi, B) \leq \int_B |\det Dw(x)| dx$$

dove $w(x) = |x|\psi(\frac{x}{|x|})$. Per la formula dell'area 2.1:

$$\begin{aligned} \int_B |\det Dw(x)| &= \int_{\mathbb{R}^n} \#\{x \in B: w(x) = y\} \\ &= \omega_n \#\{x \in \mathbb{S}^{n-1}: \psi(x) = y\} = \omega_n |k| \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Passiamo ora a dimostrare il lemma di approssimazione. Per prima cosa mostriamo come suddividere un cubo in cubetti in modo da controllare l'energia sulla frontiera della partizione.

Lemma 4.17. *Sia $Q = [0, R]^n$, $u \in W^{1,p}(Q) \cap W^{1,p}(\partial Q)$ allora per quasi ogni $r > 0$ e abbastanza piccolo esiste una costante assoluta M e una partizione di Q in $n_r \sim (\frac{R}{r})^n$ cubetti $Q_r^{(i)}$ di lato r più $n'_r \sim 2n(\frac{R}{r})^{n-1}$ parallelepipedi $P_r^{(i)}$, di lati $l_j \in [\frac{r}{4}, \frac{3r}{4}]$, $j = 1, \dots, n$ tali che:*

$$\sum_{i=1}^{n_r} \int_{\partial Q_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \sum_{i=1}^{n'_r} \int_{\partial P_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{M}{r} \int_Q |Du|^p dx. \quad (4.4)$$

Inoltre $u \lfloor \partial Q_r^i \in W^{1,p}(\partial Q_r^i)$ (rispettivamente $u \partial P_r^i \in W^{1,p}(\partial P_r^i)$).

Dimostrazione. Sia $r \in (0, R)$, $t \in (\frac{r}{4}, \frac{3r}{4})$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ definiamo

$$H_{r,i,t} = \{x \in Q: x^i = t + jr, \quad j = 0, \dots, c[\frac{1}{r}]\}$$

allora dal teorema di Fubini si ha che per ogni i :

$$\int_{\frac{r}{4}}^{\frac{3r}{4}} \left(\int_{H_{r,i,t}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt \leq \int_Q |Du|^p dx$$

e quindi, per ogni i , esiste un $t(i) \in (\frac{r}{4}, \frac{3r}{4})$ tale che:

$$\int_{H_{r,i,t(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{2}{r} \int_Q |Du|^p dx.$$

Ripetendo questo procedimento per ogni direzione $i = 1, \dots, n$ si ottiene una partizione di Q in $n_r \sim (\frac{R}{r})^r$ cubetti $Q_r^{(i)}$ tutti di lato r più i parallelepipedi di frontiera i cui lati sono tutti compresi tra $\frac{r}{4}$ e $\frac{3r}{4}$. Inoltre:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_r} \int_{\partial Q_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \sum_{i=1}^{n_r'} \int_{\partial P_r^{(i)}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \leq \frac{2}{r} \int_Q |Du|^p dx + \int_{\partial Q} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{3}{r} \int_Q |Du|^p dx \end{aligned}$$

se r è abbastanza piccolo. Si può inoltre supporre che $u \perp \partial Q_r^{(i)}$, rispettivamente $u \perp \partial P_r^{(i)}$ sia in $W^{1,p}$ e pertanto, grazie al teorema di immersione di Sobolev, che sia continua. \square

Per unificare la trattazione dei due casi associamo ad ogni parallelepipedo $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ una funzione, che è semplicemente la *jaugue* del convesso considerato, che gioca il ruolo della norma di x nel caso delle palle. Supponiamo che 0 sia il baricentro di P , e quindi $P = [-a_1, a_1] \times \dots \times [-a_n, a_n]$, e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo:

$$|x|_P = \inf\{t > 0: \frac{x}{t} \in P\}$$

allora vale la seguente proposizione:

Proposizione 4.18. *La funzione $|\cdot|_P$ gode delle seguenti proprietà.*

1. $|\lambda x|_P = |\lambda| |x|_P$
2. $|x + y|_P \leq |x|_P + |y|_P$
3. $|x|_P \leq 1$ se e solo se $x \in P$
4. $|x|_P = 1$ se e solo se $x \in \partial P$
5. $\frac{|x|}{M} \leq |x|_P \leq \frac{|x|}{m}$ con $m = \min\{a_i\}$ e $M = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$
6. $|\cdot|_P$ è $\frac{1}{m}$ -lipschitziana
7. $\frac{1}{M} \leq \|D|x|_P\| \leq \frac{1}{m}$ dove $\|A\|$ è la norma operatoriale di A
8. Detta $v(x) = \frac{x}{|x|_P}$ si ha che $v \in W^{1,p}(P)$
9. $\|D \frac{x}{|x|_P}\| \leq \frac{M}{|x|} (1 + \frac{M}{m})$

Dimostrazione. I primi 4 punti sono standard e non li dimostriamo. Si ha che $B(0, m) \subset P$ e quindi $x \frac{m}{|x|} \in P$ da cui $|x|_P \leq \frac{|x|}{m}$, viceversa per ogni $r > M$ si ha che $x \frac{M}{|x|} \in P^c$ da cui $|x|_P \geq \frac{|x|}{r}$ e al limite per $r \rightarrow M$ si ottiene la prima disuguaglianza del punto 5.

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha da 2 e da 5

$$|x|_P - |y|_P \leq |x - y|_P \leq \frac{1}{m} |x - y|$$

e scambiando i ruoli di x, y si ha il punto 6.

Ricordando che:

$$\|D|x|_P\| = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{||y|_P - |x|_P|}{|x - y|}$$

si ha immediatamente $\|D|x|_p\| \leq \frac{1}{m}$, inoltre se $z_\lambda = \lambda x$ allora:

$$\limsup_{y \rightarrow x} \frac{||y|_p - |x|_p|}{|x - y|} \geq \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{|1 - |\lambda|| |x|_p}{|1 - \lambda| |x|} \geq \frac{1}{M}$$

ossia il punto 7.

Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|_p} = \frac{1}{|x|_p} \delta_{ij} - \frac{x_j}{|x|_p^2} \frac{\partial}{\partial x_i} |x|_p$$

da cui:

$$\|D \frac{x}{|x|_p}\| \leq \frac{M}{|x|} \left(1 + \frac{M}{m}\right)$$

e quindi il punto 9. Il punto 8 si ottiene dalla stima precedente per approssimazione. \square

Osserviamo che se sostituiamo alla norma operatoriale una qualsiasi altra norma su $\mathbb{M}^{n \times n}$ tutte le precedenti stime vengono semplicemente moltiplicate per delle costanti che dipendono solo da n .

Nel seguito indicheremo semplicemente con Q_r^i i parallelepipedi della suddivisione di Q data dal lemma 4.17 e li chiameremo impropriamente cubetti.

Osserviamo che nel nostro caso $m = c(n)r$ e $M = C(n)r$ dove $c(n)$, $C(n)$ son costanti dimensionali.

Possiamo ora dimostrare il risultato di approssimazione:

Teorema 4.19. *Sia $Q = [0, R]^n$, $u \in W^{1,p}(Q; \mathbb{S}^{n-1}) \cap W^{1,p}(\partial Q; \mathbb{S}^{n-1})$, $p \in (n-1, n)$ allora esiste una successione di mappe lisce al di fuori di un numero finito di punti, $u_k \in C^\infty(Q \setminus \{a_1, \dots, a_{h(k)}\}; \mathbb{S}^{n-1})$ che convergono a u in norma $W^{1,p}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procederà per passi.

Passo 1. Definizione dei buoni e cattivi cubetti.

Siano $\varepsilon > 0$ e ν positivo e minore di p . Applichiamo il lemma 4.19 al cubo Q suddividiamolo, per quasi ogni $r > 0$, in cubetti di lato $2r$ per cui vale (4.4). Dividiamo l'insieme \mathcal{Q} dei cubetti in tre sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{Q_r^i: r^{p-n} \int_{Q_r^i} |Du|^p \geq \varepsilon r^\nu\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{Q_r^i: r^{p-n+1} \int_{\partial Q_r^i} |Du|^p \geq \varepsilon\} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{Q} \setminus \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \end{aligned}$$

Detto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ l'insieme dei cubetti cattivi, si ha che $\#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{C}_1 + \#\mathcal{C}_2$ inoltre

$$(\#\mathcal{C}_1) \varepsilon r^{\nu+n-p} \leq \sum_{Q_r^{(i)} \in \mathcal{C}_1} \int_{Q_r^{(i)}} |Du|^p \leq \int_Q |Du|^p$$

e, utilizzando la 4.4,

$$(\#\mathcal{C}_2) \varepsilon r^{n-p-1} \leq \sum_{\partial Q_r^{(i)} \in \mathcal{C}_2} \int_{\partial Q_r^{(i)}} |Du|^p \leq \frac{M}{r} \int_Q |Du|^p$$

pertanto:

$$\mathcal{L}^n \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{C}} Q \right) \leq 2^n \#\mathcal{C} r^n \leq C(n, \varepsilon, u) (r^{p-\nu} + r^p) \rightarrow 0$$

per $r \rightarrow 0$.

Passo 2. Approssimazione della funzione sui cubetti in \mathcal{C}

Siccome la misura dei cubetti cattivi sta tendendo a zero l'approssimazione di u su questo insieme può essere abbastanza grossolana. Sia

Q_r^i un cubetto cattivo, applicando ancora il lemma 4.17 suddividiamolo in $O\left(\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n\right)$ cubetti Q_ϱ^j tali che:

$$\sum_j \int_{\partial Q_\varrho^j} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{M}{\varrho} \int_{Q_r^i} |Du|^p dx$$

e definiamo su ogni cubetto Q_ϱ^j :

$$v(x) = u\left(\frac{x - x_j}{|x - x_j|_{Q_\varrho^j}} + x_j\right)$$

dove x_j è il baricentro di Q_ϱ^j e $|x|_{Q_\varrho^j}$ è la *jaug*e definita prima. Si ha ovviamente che $v = u$ su ∂Q_ϱ^j , v è continua tranne che in un numero finito di punti e inoltre, per la formula di coareae sfruttando i punti 6, 7 e 9 della proposizione 4.18 e l'osservazione che la segue:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varrho^j} |Dv|^p &\leq C(n) \int_{Q_\varrho^j} \left| D_x u\left(\frac{x - x_j}{|x - x_j|_{Q_\varrho^j}} + x_j\right) \right|^p \left| D \frac{x - x_j}{|x - x_j|_{Q_\varrho^j}} \right|^p \\ &= C(n) \int_0^1 \int_{\{|x-x_j|_{Q_\varrho^j}=t\}} \left| Du\left(\frac{x - x_j}{t} + x_j\right) \right|^p \frac{1}{t^p} \frac{1}{D_x |x - x_j|_{Q_\varrho^j}} d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt \\ &\leq C(n) \varrho \int_0^1 \int_{\{|y|_{Q_\varrho^j}=1\}} |Du(y + x_j)|^p d\mathcal{H}^{n-1}(y) t^{n-1-p} dt \\ &\leq C(n, p) \varrho \int_{\partial Q_\varrho^j} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

Pertanto grazie alla (4.4)

$$\begin{aligned} \int_{Q_r^i} |Dv|^p &= \sum_j \int_{Q_\varrho^j} |Dv|^p \\ &\leq C(n, p) \varrho \sum_j \int_{\partial Q_\varrho^j} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq C(n, p) \int_{Q_r^i} |Du|^p. \end{aligned}$$

Passo 3. Approssimazione della funzione sui cubetti in \mathcal{B}

Per approssimare la funzione su \mathcal{B} osserviamo, per prima cosa, che se P è un cubetto $(n-1)$ -dimensionale di lato r , o un parallelepipedo con tutte le dimensioni comparabili con r , e

$$\int_P |Du|^p \leq \varepsilon r^{n-p-1}$$

allora dalla disuguaglianza di Morrey si ha

$$\text{osc}_P u \leq C(n, p) r^{1-\frac{n-1}{p}} \left(\int_P |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n, p) \varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

Possiamo quindi scegliere ε abbastanza piccolo in modo che se $Q_r^i \in \mathcal{B}$ allora $u(\partial Q_r^i) \subset B(y_i, \delta) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ per un qualche $y_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ che dipende da Q_r^i e $\delta = \delta(\varepsilon)$. Sia inoltre $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow B(y_i, 2\delta) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ una retrazione lipschitziana.

Definiamo, per ogni $x \in Q_r^i$, $\bar{v}(x) = \pi(u(x))$; chiaramente $\bar{v} \in W^{1,p}(Q_r^i, B(y_i, 2\delta))$, $\bar{v} = u$ su ∂Q_r^i e

$$U_i = \{x \in Q_r^i: u(x) \neq \bar{v}(x)\} \subset \{x \in Q_r^i: u(x) \in \mathbb{R}^n \setminus B(y_i, 2\delta) \cap \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Mostriamo che quest'ultimo insieme ha misura piccola rispetto a

Q_r^i . Infatti supponendo che $Q_r^i = [0, r]^n$, cosa che possiamo fare senza alcuna perdita di generalità, definiamo:

$$H_t = \{x \in [0, r]^n : x_1 = t\}$$

e sia:

$$A = \{t \in (0, r) : \int_{H_t} |Du|^p > \varepsilon r^{n-p-1}\}$$

allora siccome:

$$\int_0^r \int_{H_t} |Du|^p = \int_{[0, r]^n} |Du|^p \leq \varepsilon r^{n-p+v}$$

otteniamo che $|A| \leq r^{v+1}$. Se $t \in [0, r] \setminus A$ per quanto osservato all'inizio abbiamo che $u(H_t) \subset B(y_i, 2\delta)$ e pertanto:

$$|U_i| \leq |\{x \in [0, r]^n : x_1 \in A\}| \leq r^{n+v}.$$

Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned} \int_{Q_i} |u - \tilde{v}|^p + |Du - D\tilde{v}|^p &= \int_{U_i} |u - \pi(u)|^p + |Du - D(\pi(u))|^p \\ &\leq C(\pi) \int_{U_i} |u|^p + |Du|^p \end{aligned}$$

Sfruttando il lemma 4.20 possiamo trovare una successione di mappe continue $w_k: Q_r^i \rightarrow B(y_i, 6\delta) \cap S^{n-1}$ tali che $w_k = \tilde{v} = u$ su ∂Q_r^i e $\|w_k - \tilde{v}\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$.

Passo 4. Approssimazione finale.

Consideriamo le mappe:

$$v_{k,r}(x) = \begin{cases} w(x) & \text{se } x \in Q_r^i \text{ e } Q_r^i \text{ è un cubetto cattivo} \\ w_k(x) & \text{se } x \in Q_r^i \text{ e } Q_r^i \text{ è un cubetto buono.} \end{cases}$$

Siccome tutte le mappe costruite coincidono con u sui bordi dei cubetti della partizione $v_{k,r}$ è ben definita, continua tranne in un numero finito di punti e inoltre:

$$\begin{aligned} \int_Q |w_{k,r} - u|^p + |Dw_{k,r} - Du|^p &\leq \sum_{Q^i \in \mathcal{C}} \int_{Q^i} \dots + \sum_{Q^i \in \mathcal{B}} \int_{Q^i} \dots \\ &\leq C \sum_{Q^i \in \mathcal{C}} \int_{Q^i} |u|^p + |Du|^p + C \sum_{Q^i \in \mathcal{B}} \int_{Q^i} |u - \tilde{v}|^p + |Du - D\tilde{v}|^p \\ &\quad + \sum_{Q^i \in \mathcal{B}} \int_{Q^i} |w_k - w|^p + |Dw_k - Dw|^p \\ &\leq C \sum_{Q^i \in \mathcal{C}} \int_{Q^i} |u|^p + |Du|^p + C \int_{\cup U_i} |u|^p + |Du|^p \\ &\quad + \sum_{Q^i \in \mathcal{B}} \int_{Q^i} |w_k - w|^p + |Dw_k - Dw|^p = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\left| \bigcup U_i \right| \leq C \left(\frac{R}{r} \right)^n r^{n+v} \rightarrow 0$$

per $r \rightarrow 0$. Quindi per il teorema di Lebesgue abbiamo che $I_1 + I_2 \rightarrow 0$ in r e $I_3 \rightarrow 0$ in k .

Possiamo quindi approssimare u con una successione v_k di mappe continue tranne in un numero finito di punti. Usando il lemma 4.21 troviamo una successione u_k di mappe lisce tranne in un numero finito di punti che approssimano u . \square

Lemma 4.20. Sia $w \in W^{1,p}(Q; B(y, \delta) \cap \mathbb{S}^{n-1}) \cap C^0(\partial Q) \cap W^{1,p}(\partial Q)$ allora esiste una successione di mappe $\{w_k\} \subset W^{1,p}(Q; B(y, 3\delta) \cap \mathbb{S}^{n-1}) \cap C^0(\bar{Q}) \cap W^{1,p}(\partial Q)$ tale che $\|w_k - w\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $Q = B(0, 1)$; sia:

$$w_\delta = \begin{cases} w\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{se } 1 - \sigma < |x| < 1 \\ w\left(\frac{x}{1-\sigma}\right) & \text{se } |x| < 1 - \sigma. \end{cases}$$

Allora $w_\sigma \rightarrow w$ e quindi possiamo supporre che $w(x) = w\left(\frac{x}{|x|}\right)$ in $1 - \sigma < |x| < 1$. Sia ϱ_ε un nucleo mollificatore e η una funzione liscia tale che $\eta = 1$ su $B(0, 1 - \frac{\sigma}{2})$ e $\eta = 0$ su $B \setminus B(0, 1 - \frac{\sigma}{4})$ definiamo:

$$u_\varepsilon = \pi((1 - \eta(x))w(x) + \eta(x)w_\varepsilon(x)),$$

dove $\pi: (\mathbb{S}^{n-1})_r \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ è la proiezione che possiamo supporre con $\text{Lip } \pi \leq \frac{3}{2}$.

Allora le prime due proprietà sono evidenti e per quanto riguarda l'immagine di u_ε si ha:

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - y| &= |\pi((1 - \eta(x))w(x) + \eta(x)w_\varepsilon(x)) - \pi(y)| \\ &\leq \text{Lip } \pi \left\{ |w(x) - y| + \int |w(x - z) - y| \varrho_\varepsilon(z) dz \right\} \leq 3\delta. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.21. Sia $w \in C^0(Q \setminus \{a_1, \dots, a_h\}) \cap W^{1,p}$ allora esiste una successione di mappe $w_k \in C^\infty(Q \setminus \{a_1, \dots, a_h\})$ che converge a w in norma $W^{1,p}$ inoltre $w_k \rightarrow w$ uniformemente sui compatti di $Q \setminus \{a_1, \dots, a_h\}$.

Dimostrazione. Sia $\sigma_k \searrow 0$, consideriamo un ricoprimento $\{V_j\}$ localmente finito di $Q \setminus \{a_1, \dots, a_{h(k)}\}$ e una partizione dell'unità $\{\varphi_j\}$ associata.

Sia ϱ_ε un nucleo mollificatore e consideriamo per ogni j un ε_j tale che:

$$\|(\varphi_j w) - (\varphi_j w)_{\varepsilon_j}\|_{W^{1,p}(U_j)} + \|(\varphi_j w) - (\varphi_j w)_{\varepsilon_j}\|_{L^\infty(\bar{U}_j)} \leq \sigma_k 2^{-j}$$

definiamo $v_{\sigma_k} = \sum_j (\varphi_j w)_{\varepsilon_j}$ e $w_k = \pi(v_{\sigma_k})$ dove $\pi: (\mathbb{S}^{n-1})_r \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ è la proiezione; è facile vedere che w_k ha tutte le proprietà richieste. □

Abbiamo quindi mostrato come sia possibile approssimare una mappa u a valori in una sfera² con mappe regolari tranne in un numero finito di punti singolari.

Se $u \in C^0(Q \setminus \{a_1, \dots, a_h\}; \mathbb{S}^{n-1})$ è ben definita la classe di omotopia di u nell'intorno di ogni punto, infatti se $r < \min\{|a_i - a_j|\}$ è chiaro che il grado di $u \lfloor \partial B(x, r)$ dipende solo da x ed è zero se $x \neq a_i$, e, per il Teorema di Hopf, il grado di una mappa a valori in una sfera identifica univocamente la classe di omotopia.

Mostriamo che possiamo definire la classe di omotopia nell'intorno di un punto anche se $u \in W^{1,p}(Q; \mathbb{S}^{n-1}) \cap BnV$, infatti sia $x_0 \in Q$, sappiamo che esiste un raggio $r(x_0)$ tale che per ogni $r < r(x_0)$ $\deg(u, \partial B(x_0, r), \mathbb{S}^{n-1})$ è costante, e vale $\omega_n^{-1} \text{Det } Du(B(x_0, r))$. Sfruttando il Teorema di Hopf possiamo ancora una volta definire la classe di omotopia di u ristretta ad un intorno di x_0 .

In queste ipotesi è possibile fa vedere che la classe di omotopia delle mappe approssimanti fornite dal teorema 4.19 nell'intorno dei loro punti singolari dipende solo da u . Per prima cosa osserviamo che per ogni insieme aperto D con bordo lipschitziano se chiamiamo $D_t = \{x \in D: \text{dist}(x, \partial D) > t\}$ abbiamo $\deg(u, \partial D_t, \mathbb{S}^{n-1}) = \text{Det } Du(D_t)$

² in effetti la stessa costruzione vale per mappe a valori in una varietà qualunque

per quasi ogni t abbastanza piccolo.³ Quindi se $\text{diam}(D) < r(x_0)$ e $x_0 \in D$ si ha che:

$$\deg(u, \partial D, \mathbb{S}^{n-1}) = \deg(u, \partial B(x_0, r), \mathbb{S}^{n-1}) = d(x_0).$$

Risulta quindi che $\deg(u, x_0) = \deg(u, \partial D, \mathbb{S}^{n-1})$ dove D è un insieme con bordo lipschitziano che contiene x_0 e con $\text{diam}(D) < r(x_0)$.

Siccome dalla dimostrazione del teorema 4.19 discende che le mappe approssimanti possono essere scelte tali per cui, se Q_ρ è un cubetto della partizione, si possa avere $\|u - u_k\|_{L^\infty(\partial Q_\rho)} \leq \frac{1}{2}$ per ogni k abbiamo che $u \perp \partial Q_\rho$ e $u_k \perp \partial Q_\rho$ sono omotope. Siano ora $\{a_1, \dots, a_{h(k)}\}$ i punti singolari relativi alla mappa u_k allora saranno, per costruzione, ognuno all'interno di un sottocubetto $Q_{r_i}(a_i)$ della partizione di un cubetto cattivo (confronta il passo due della dimostrazione) e pertanto si ha che:

$$\deg(u_k, a_i) = \deg(u_k, \partial Q_{r_i}(a_i), \mathbb{S}^{n-1}) = \deg(u, \partial Q_{r_i}(a_i), \mathbb{S}^{n-1})$$

che dipende solo da u .

Mostriamo ora come eliminare i punti singolari nell'intorno dei quali la classe di omotopia di u è banale. Possiamo ovviamente supporre che il punto singolare sia l'origine e restringerci ad un suo intorno abbastanza piccolo.

Lemma 4.22. *Sia $u \in C^\infty(B_R \setminus \{0\}; \mathbb{S}^{n-1})$ tale che la classe di omotopia di u in 0 è banale, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una mappa $v \in C^\infty(B; \mathbb{S}^{n-1})$ tale che $\|u - v\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $r < R$ e consideriamo:

$$\mu(r) = \inf \left\{ \int_{B_r} |Dv|^p : v = u \text{ su } \partial B_r, v \in \text{Lip}((B_r; \mathbb{S}^{n-1})) \right\},$$

osserviamo che la classe di competizione su cui facciamo l'estremo inferiore è non vuota per la condizione sulla classe di omotopia di u . Mostriamo che:

$$\mu(r) \leq C(n, p) \int_{B_r} |Du|^p$$

infatti sia v una mappa ammissibile e definiamo:

$$w(x) = \begin{cases} v(3x) & |x| < \frac{r}{3} \\ u(T(x)) & \frac{r}{3} < |x| < \frac{2r}{3} \\ u(x) & \frac{2r}{3} < |x| < r. \end{cases}$$

Dove $T: B_{\frac{2r}{3}} \setminus B_{\frac{r}{3}} \rightarrow B_r \setminus B_{\frac{2r}{3}}$ è data da:

$$T(x) = \frac{x}{|x|} \left(\frac{4}{3}r - |x| \right)$$

e soddisfa $|DT(x)| \leq C(n)$.

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |Dw(x)|^p dx &= 3^p \int_{B_{\frac{r}{3}}} |Dv(3x)|^p dx + \int_{B_{\frac{2r}{3}} \setminus B_{\frac{r}{3}}} |Du(T(x))|^p |DT|^p + \\ &\int_{B_r \setminus B_{\frac{2r}{3}}} |Du|^p \\ &\leq 3^{p-n} \int_{B_r} |Dv(x)|^p dx + C(n, p) \int_{B_r} |Du|^p \end{aligned}$$

³ La dimostrazione di questa affermazione procede come per il caso di sfere considerando la mappa $f_\delta = \min\{1, \frac{\text{dist}(x, \partial D)}{\delta}\}$ che approssima la funzione caratteristica di D

da cui scegliendo una successione minimizzante segue subito:

$$\mu(r) \leq \frac{C(n,p)}{1-3^{p-n}} \int_{B_r} |Du|^p$$

Ora per ogni ε possiamo scegliere un r tale che $\mu(r) < \varepsilon$ e una mappa $v \in \text{Lip}((B_r; \mathbb{S}^{n-1}))$ tale che:

$$\int_{B_r} |Dv|^p \leq 2\varepsilon$$

Si verifica immediatamente che:

$$w(x) = \begin{cases} v(x) & |x| < r \\ u(x) & r < |x| < R. \end{cases}$$

soddisfa la tesi. \square

Dal lemma precedente e dalla discussione che lo precede segue la seguente proposizione che ci sarà fondamentale:

Proposizione 4.23. *Sia $u \in W^{1,p}(Q; \mathbb{S}^{n-1}) \cap BnV$ allora:*

1. *Se $\text{Det } Du \perp Q = 0$ esiste una successione di mappe $u_k \in C^\infty(Q; \mathbb{S}^{n-1})$ che tendono ad u in norma $W^{1,p}$*
2. *Se $\text{Det } Du \perp Q = \omega_n d \delta_{x_0}$ allora esiste una successione di mappe $u_k \in C^\infty(Q \setminus \{x_k\}; \mathbb{S}^{n-1})$ che approssimano u . Inoltre:*

$$\deg(u_k, x_k) = \deg(u, x_0) = d$$

$$e \ x_k \rightarrow x_0.$$

Dimostrazione. Se la classe di omotopia di u in ogni punto è banale si ha che le singolarità delle mappe approssimanti fornite dal teorema 4.19 sono tutte eliminabili utilizzando il lemma precedente; questo dimostra il primo punto.

Ripercorrendo la dimostrazione di 4.19 è chiaro che il punto x_0 starà, per ogni r , in un sottocubetto della partizione di un cubetto cattivo (altrimenti la mappa ristretta al bordo del cubetto non sarebbe suriettiva ma questo non è possibile perchè il grado è non nullo). Tutte le singolarità create dagli altri cubetti cattivi possono essere eliminate come prima e inoltre la condizione:

$$\deg(u_k, x_k) = \deg(u, x_0) = d$$

è conseguenza della discussione precedente. La convergenza di $x_k \rightarrow x_0$ è ovvia, sempre dalla dimostrazione. \square

Mostriamo infine come sia possibile supporre che le mappe approssimanti siano zero omogenee vicino alle singolarità:

Lemma 4.24. *Sia $u \in C^\infty(B_R \setminus \{0\}; \mathbb{S}^{n-1})$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di mappe $v_k \in C^\infty(B_R \setminus \{0\}; \mathbb{S}^{n-1})$ tale che:*

1. $\|u - v_k\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$
2. *Esiste un raggio r_k tale che $v_k(x) = u(r_k \frac{x}{|x|})$ in B_{r_k} e $u = v_k$ in $B_R \setminus B_{r_k}$*
3. $\deg(u, 0) = \deg(v_k, 0)$

Dimostrazione. Siccome:

$$\int_0^R \int_{\partial B_\rho} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} d\rho < \text{inf ty}$$

possiamo trovare una successione di raggi $r_k \rightarrow 0$ tale che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k \int_{\partial B_{r_k}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Definiamo:

$$v_k(x) = \begin{cases} u(x) & x \in B_R \setminus B_{r_k} \\ u\left(r_k \frac{x}{|x|}\right) & x \in B_{r_k} \end{cases}$$

Ovviamente la mappa soddisfa il secondo ed il terzo punto della tesi, per quanto riguarda il primo:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |u - u_k|^p + |Du - Du_k|^p &\leq C|B_{r_k}| + C \int_{B_{r_k}} |Du|^p + C \int_{B_{r_k}} |Dv_k|^p \leq \\ o(1) + Cr_k \int_{\partial B_{r_k}} |Du|^p d\mathcal{H}^{n-1} &= o(1) \end{aligned}$$

□

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per dimostrare l'uguaglianza tra $|\text{Det } Du|$ e TV per mappe a valori in una sfera.

Teorema 4.25. *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{n-1})$ tale che $TV_w^p(u, \Omega) < \infty$ allora, detta μ la misura di Radon del teorema 4.4, per ogni aperto $A \subseteq \Omega$ tale che $\mu(\partial A) = 0$ abbiamo:*

$$|\text{Det } Du|(A) = \mu(A)$$

Dimostrazione. Dalla discussione ad inizio capitolo sappiamo che $u \in BnV$ e quindi $\text{Det } Du = \sum_{i=1}^m \omega_n d_i \delta_{x_i}$, inoltre, per ogni aperto U tale che $\mu(\partial U) = 0$, abbiamo:

$$|\text{Det } Du(U)| \leq \mu(U).$$

Basta quindi dimostrare la disuguaglianza opposta.

Consideriamo la seguente famiglia di cubi:

$$\mathcal{F} = \{Q \subset A : u \llcorner Q \in W^{1,p}, \mu(\partial Q) = \text{Det } Du(\partial Q) = 0\}$$

allora \mathcal{F} è un ricoprimento fine di A e pertanto possiamo trovare un sotto-ricoprimento disgiunto e numerabile $\{Q_j\}$ tale che:

$$\mu(A) = \sum_i \mu(Q_j).$$

Consideriamo un cubetto Q e supponiamo $\text{Det } Du \llcorner Q = 0$ allora per la proposizione 4.23 abbiamo che esiste una successione di mappe $u_k \in C^\infty(Q; \mathbb{S}^{n-1})$ che approssimano u nella topologia forte di $W^{1,p}$ quindi, essendo l'immagine delle u_k $(n-1)$ -dimensionale:

$$\begin{aligned} \mu(Q) = TV_w^p(u, Q) &\leq TV_s^p(u, Q) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_Q |\det Du_k| = 0 = |\text{Det } Du|(Q). \end{aligned}$$

Viceversa supponiamo $\text{Det } Du \llcorner Q = \omega_n d \delta_{x_0}$ dove $d = \deg(u, x_0)$ allora, sempre dalla proposizione 4.23, sappiamo che esiste una successione di mappe $u_k \in C^\infty(Q \setminus \{x_k\}; \mathbb{S}^{n-1})$ che tendono ad u nella topologia forte, per il lemma 4.24 possiamo inoltre supporre che esista un raggio r_k tale che $u \llcorner B(x_k, r_k) = u\left(r_k \frac{x}{|x|}\right)$.

Siccome la mappa è liscia al di fuori di $B(x_k, r_k)$ e a valori in \mathbb{S}^{n-1}

abbiamo, sfruttando la semicontinuità inferiore di TV_s^p e il teorema 4.15:

$$\begin{aligned}\mu(Q) &= TV_w^p(u, Q) \leq TV_s^p(u, Q) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} TV_s^p(u_k, B(x_k, r_k)) = \\ &= \omega_n |\deg(u_k, x_k)| = \omega_n |\deg(u, x_0)| = |\text{Det } Du|(Q).\end{aligned}$$

Siccome possiamo sempre ridurci, per ognuno dei cubi del ricoprimento, ad uno dei due casi precedenti, abbiamo:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sum_i \mu(Q_j) = \sum_i |\text{Det } Du|(Q) \\ &= |\text{Det } Du|(\bigcup_i Q_i) \leq |\text{Det } Du|(A)\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

MAPPE CHE PRESERVANO L'ORIENTAZIONE IN
SENSO DEBOLE

In questo capitolo mostriamo un altro caso in cui si ha uguaglianza tra TV_w^p e $|\text{Det } Du|$. Come suggeriscono gli esempi precedentemente esposti è necessario imporre qualche tipo di ipotesi su u .

Le condizioni che mettiamo sembrano essere ottimali con l'eccezione della richiesta di continuità quasi ovunque (vedi teorema 5.8). Tuttavia nell'ultima sezione, ispirandoci a [40], introduciamo una classe di mappe che abbiamo chiamato *debolmente monotone* per la quale sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema. Queste funzioni sembrano essere una classe ragionevole in cui cercare minimi per problemi variazionali legati all'elasticità non lineare.

5.1 GRADO DI BROUWER E DETERMINANTE DISTRIBUZIONALE

Per prima cosa diamo una definizione di grado di Brower per mappe discontinue che mantiene le proprietà topologiche che lo caratterizzano per le mappe continue. Questa definizione è stata introdotta per la prima volta in [39] (confronta anche [19, 25, 40]).

Nel seguito quando scriveremo che $u \in W^{1,p}(\partial D)$, D dominio con bordo lipschitziano e $p > n - 1$ suppremo sempre di prendere il rappresentante continuo su ∂D .

Definizione 5.1. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$, $p \in (n - 1, n)$ definiamo, per ogni $D \subset \subset \Omega$ con bordo lipschitziano tale che $u \in W^{1,p}(\partial D)$, il grado di u su D $\text{Deg}(u, D, y)$ come l'unica funzione $BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z})$ tale che per ogni campo $g \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{Deg}(u, D, y) \text{div } g(y) dy = \int_{\partial D} g(u(x)) \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial D} d\mathcal{H}^{n-1} \quad (5.1)$$

Per prima cosa mostriamo che è una buona definizione. Sia v una mappa liscia allora sappiamo che (confronta 2.3):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \text{deg}(v, D, y) \text{div}_y g(y) dy &= \int_D \text{div}_y g(v(x)) \det Dv(x) dx \\ &= \int_D \sum_i \frac{\partial g^i}{\partial y^i}(v(x)) \det Dv(x) dx = \int_D \sum_{i,m} \frac{\partial g^i}{\partial y^m}(v(x)) \delta_{im} \det Dv(x) dx \\ &= \int_D \sum_{i,m,k} \frac{\partial g^i}{\partial y^m}(v(x)) \frac{\partial v^m}{\partial x^k}(x) (\text{adj } Dv(x))_k^i dx \\ &= \int_D \sum_{k,i} \frac{\partial}{\partial x^k} (g^i(v(x))) (\text{adj } Dv(x))_k^i dx \\ &= \int_D \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} (g^i(v(x))) (\text{adj } Dv(x))_k^i dx \\ &= \int_D \text{div}_x (g(v(x)) \text{adj } Dv(x)) dx = \int_{\partial D} g(v(x)) \text{adj } Dv(x) \cdot \nu_{\partial D} d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{deg}(v, D, y) \text{div } g(y) dy \leq \|g\|_\infty \int_{\partial D} |\text{adj } Dv| \leq C(n, p) \|g\|_\infty \int_{\partial D} |Dv|^p$$

In particolare abbiamo che $\deg(v, D, y) \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z})$ e che, indicando con $D \deg(v, D, y)$ la sua derivata distribuzionale:

$$|D \deg(v, D, y)|(\mathbb{R}^n) \leq C(n, p) \int_{\partial D} |Dv|^p. \quad (5.2)$$

Consideriamo ora una successione di mappe lisce v_k che converge a u in $W^{1,p}(\partial D)$, in particolare uniformemente, allora indicando con $d_k(y) = \deg(v_k, D, y)$ abbiamo, grazie alla (5.2), che

$$\sup_k |Dd_k|(\mathbb{R}^n) \leq C,$$

inoltre $v_k(D) \subset B(0, R)$ per un qualche raggio abbastanza grande e indipendente da k , pertanto d_k sono tutte nulle al di fuori di un compatto. Applicando la disuguaglianza di Poincarè otteniamo quindi anche l'equilimitatezza di $\|d_k\|_{L^1}$.

Esiste quindi una sottosuccessione, non rinominata, e una funzione $\varphi(y) \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z})$ tale che

$$d_k \rightarrow \varphi \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Passando al limite nella 5.1 abbiamo che $\varphi = \text{Deg}(u, D, y)$. In maniera analoga si mostra l'unicità.

Osserviamo che $\text{Deg}(u, \partial D, y)$ dipende solo da $u \llcorner \partial D$ e che coincide col grado di Brouwer di una qualsiasi funzione continua che coincide con u su ∂D . Infatti si a w una tale funzione, ricordiamo che:

$$\deg(w, D, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(w_k, D, y)$$

dove $w_k \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ convergono a w uniformemente. Modificando opportunamente la successione si può anche supporre che

$$w_k \llcorner \partial D \rightarrow u \llcorner \partial D = w \llcorner \partial D \quad \text{in } W^{1,p}(\partial D).$$

Per quanto mostrato prima $\deg(w_k, D, y) \rightarrow \text{Deg}(u, D, y)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ da cui la tesi.

Alla luce di questo fatto il teorema 4.14 e l'esempio 3.2 si leggono come:

$$\text{Det } Du = \int_{\mathbb{R}^n} \text{Deg}(u, B, y) dy \delta_0$$

e

$$\text{TV}(u, B) = \int_{\mathbb{R}^n} |\deg(u, B, y)| dy \delta_0$$

se $u: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una mappa 0-omogenea.

Possiamo dare a $\text{Deg}(u, D, y)$ la seguente interpretazione geometrica, definiamo la corrente $S = u_{\#}[\partial D]$ ¹ che si vede facilmente appartenere a $\mathcal{R}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ e essere a bordo nullo. Esiste allora una corrente $T \in \mathcal{R}^n(\mathbb{R}^n)$ tale che $S = \partial T$ e quindi, confronta la sezione 1.4.2, troviamo un'unica funzione $\varphi \in BV(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ tale che $T = \mathcal{L}^n \llcorner \varphi$. Ragionando per approssimazione come prima si verifica che $\varphi = \text{Deg}(u, D, y)$. Più precisamente applicando la formula dell'area abbiamo che:

$$u_{\#}[\partial D] = (\mathcal{H}^{n-1} \llcorner u(\partial D)) \llcorner \star v(y)$$

dove:

$$v(y) = \sum_{\{x: u(x)=y \mid \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial D} \neq 0\}} \frac{\text{adj } Du \cdot \nu_{\partial D}}{|\text{adj } Du \cdot \nu_{\partial D}|}$$

¹ In effetti noi abbiamo definito il *push-forward* di una corrente solo per mappe lipschitziane ma può essere definito anche in questo caso mediante un procedimento di approssimazione

e \star è l'operatore di Hodge (vedi [26]). Di conseguenza indicando con $T = \mathcal{L}^n \lrcorner \varphi$ abbiamo:

$$\partial T = (\mathcal{H}^{n-1} \lrcorner u(\partial D)) \lrcorner \star v(y)$$

in particolare abbiamo che $\text{spt } \partial T = \text{spt } D \text{ Deg}(u, D, y) \subset u(\partial D)$, inoltre la formula dell'area e il fatto che $p > n - 1$ implica che $\mathcal{H}^{n-1}(u(\partial D))$ è nulla.

Conseguenza di quest'ultima osservazione è che $\text{Deg}(u, D, y)$ è costante su ogni componente connessa di $\mathbb{R}^n \setminus u(\partial D)$.

Vale anche, come nel caso regolare, una formula di addizione per il grado. Supponiamo infatti A e $B \subset \subset A$ siano insiemi con bordo liscio, allora se $u \in W^{1,p}(\partial A) \cap W^{1,p}(\partial B)$ vale:

$$\text{Deg}(u, A, y) = \text{Deg}(u, B, y) + \text{Deg}(u, A \setminus B, y). \quad (5.3)$$

Per mostrarlo osserviamo che scrivendo la (5.1) per A e B e sottraendo abbiamo:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (\text{Deg}(u, A, y) - \text{Deg}(u, B, y)) \text{div } g(y) dy \\ &= \int_{\partial A} g(u(x)) \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial A} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial B} g(u(x)) \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial B} d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

ma, tenendo conto delle orientazioni:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial A} g(u(x)) \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial A} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial B} g(u(x)) \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial B} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial(A \setminus B)} g(u(x)) \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial(A \setminus B)} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \text{Deg}(u, A \setminus B, y) \text{div } g(y) dy \end{aligned}$$

da cui, siccome ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è una divergenza, la (5.3).

Il grado appena definito risulta continuo rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}$ come mostrato dalla seguente:

Proposizione 5.2. *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$, $n - 1 < p < n$, $D \subset \Omega$ con bordo lipschitziano tale che $u \in W^{1,p}(\partial D)$, sia u_k una successione di mappe che converge a u debole in $W^{1,p}(\partial D)$ e tale che $\sup \|u_k\| \leq C$ allora:*

$$\text{Deg}(u_k, D, \cdot) \rightarrow \text{Deg}(u, D, \cdot) \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Ragionando come prima la successione $\{\text{Deg}(u_k, D, y)\}$ è equilimitata in $BV(\mathbb{R}^n)$ e pertanto possiamo estrarne una sottosuccessione convergente ad una funzione $\varphi(y)$. Sia $g \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}$ abbiamo, sfruttando la equilimitatezza della successione, che $g(u_k) \rightarrow g(u)$ in $L^q(\partial D)$ per $q \in [1, \infty)$ e pertanto, siccome $\text{adj } Du_k \rightarrow \text{adj } Du$ in $L^{\frac{p}{n-1}}(\partial D)^2$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \text{div } g(y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Deg}(u_k, D, y) \text{div } g(y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial D} g(u_k) \text{adj } Du_k \cdot \nu_{\partial D} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial D} g(u) \text{adj } Du \cdot \nu_{\partial D} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \text{Deg}(u, D, y) \text{div } g(y). \end{aligned}$$

□

Passiamo ora a discutere la prima ipotesi che ci garantirà l'uguaglianza tra $|\text{Det } Du|$ e TV .

Per prima cosa osserviamo che se consideriamo per ogni $x \in \Omega$ la famiglia di palle centrate in x $\{B(x, r)\}_{r>0}$, o di quadrati $\{Q(x, r)\}$,

² Quest'ultima affermazione non discende direttamente dal teorema 2.5, ma una volta resa la frontiera localmente piatta la dimostrazione procede sulla stessa linea, vedi [11]

abbiamo che le ipotesi della definizione 5.1 sono soddisfatte per quasi ogni r .

Definizione 5.3. Diremo che una mappa $u \in W^{1,p}(\Omega)$ conserva l'orientazione in senso debole e scriveremo $u \in WOP(\Omega)$ se per ogni $x \in \Omega$ e per quasi ogni raggio r abbiamo che $\text{Deg}(u, B(x, r), y) \geq 0$ per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^n$.

Notiamo che se u è liscia allora abbiamo che $u \in WOP$ se e solo se $\det Du \geq 0$, confronta la proposizione 5.6.

La condizione WOP è più forte di $\det Du \geq 0$ quasi ovunque, sostanzialmente si richiede di conservare l'orientamento anche vicino agli eventuali punti di discontinuità.

Esempio 5.4. Si consideri la mappa $u : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$u(x) = \frac{1 - |x|}{|x|} (-x^1, \dots, x^n)$$

allora $\det Du > 0$ quasi ovunque, ma $\text{Deg}(u, B(0, r), y) \leq 0$, infatti una mappa continua che coincide con u su $\partial B(0, r)$ è la funzione affine:

$$w(x) = (1 - r)((-x^1, \dots, x^n)$$

che per cui $\text{deg}(w, B(0, r), y) \leq 0$.

Osserviamo che la classe $WOP \cap \{\|u\|_\infty \leq C\}$ è debolmente chiusa, questa è immediata conseguenza del seguente lemma e della continuità del grado:

Lemma 5.5. Sia $\{u_k\} \subset W^{1,p}(\Omega)$, $u_k \rightharpoonup u$ allora per ogni $x \in \Omega$ e quasi ogni $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$ esiste una sottosuccessione, dipendente da x e da r , tale che $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\partial B(x, r))$, in particolare uniformemente.

Dimostrazione. La convergenza di $u_k \llcorner \partial B(x, r)$ a $u \llcorner \partial B(x, r)$ in L^p è facile conseguenza della formula di coarea, inoltre abbiamo:

$$\int_0^{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \int_{\partial B(x, r)} |Du_k|^p \leq \int_\Omega |Du_k|^p \leq C$$

quindi, detta:

$$f_k(r) = \int_{\partial B(x, r)} |Du_k|^p$$

grazie al lemma di Fatou:

$$\int_0^{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(r) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\text{dist}(x, \partial\Omega)} f_k(r) < \infty$$

da cui $f(r) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(r)$ è finito per quasi ogni r . Fissato uno di questi raggi scegliamo una sottosuccessione $f_{k_j}(r)$ tale che:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(r) = f(r)$$

allora abbiamo che $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\partial B(x, r))$, la convergenza uniforme è conseguenza del teorema di immersione di Sobolev. \square

Possiamo ora dimostrare:

Proposizione 5.6. Sia $u \in WOP(\Omega) \cap W^{1,p} \cap L^\infty$ allora:

1. $\text{Det } Du$ è una misura di Radon positiva
2. Per ogni x e quasi ogni r :

$$\text{Det } Du(B(x, r)) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{Deg}(u, B(x, r), y) dy$$

Dimostrazione. Per dimostrare il primo punto basta far vedere che che $(\text{Det } Du * \varrho_\varepsilon)(x) \geq 0$ dove ϱ_ε è una famiglia di mollificatori. Scegliamo una funzione $f \in C^\infty([0,1])$ con $f' \leq 0$ tale che $\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(\frac{|x|}{\varepsilon})$ soddisfi alle usuali proprietà dei mollificatori.

$$\begin{aligned} (\text{Det } Du * \varrho_\varepsilon)(x) &= \langle \text{Det } Du, \varrho_\varepsilon(\cdot - x) \rangle \\ &= -\frac{1}{n} \int_{B(x,r)} u(y) \text{adj } Du(y) D\varrho_\varepsilon(x-y) dy \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^r f'(s) \int_{\partial B(x,s)} u \text{adj } Du \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} ds \\ &= -\int_0^r f'(s) \text{Deg}(u, B(x,s), y) ds \geq 0. \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato l'equazione 5.1 al campo $g(y) = \frac{y}{n}$.

Per quanto riguarda il secondo punto scegliamo:

$$f_\delta(\varrho) = \begin{cases} 1 & \varrho < r - \delta \\ \frac{r-\varrho}{\delta} & r - \delta < \varrho < r \\ 0 & \varrho > r \end{cases}$$

allora per quasi ogni r :

$$\begin{aligned} \text{Det } Du(B(x,r)) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \text{Det } Du, f_\delta(|\cdot - x|) \rangle \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} -\frac{1}{n} \int_{B(x,r)} u(y) \text{adj } Du(y) Df_\delta(|\cdot - x|) dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} -\frac{1}{n} \frac{1}{\delta} \int_{r-\delta}^r \int_{\partial B(x,s)} u \text{adj } Du \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} ds \\ &= \int_{\partial B(x,r)} u \text{adj } Du \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} = \int \text{Deg}(u, B(x,r), y) dy. \end{aligned}$$

□

Osserviamo che se $\text{Det } Du = \det Du d\mathcal{L}^n + \mu_s$ la proposizione precedente ci garantisce che, come nel caso di mappe lisce, $\det Du \geq 0$ quasi ovunque.

In generale l'esempio 5.4 mostra che non è possibile invertire questa implicazione. Un altro esempio si ha considerando $u(x) = \varphi(\frac{x}{|x|})$ con $\varphi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ con grado negativo; è immediato verificare che $\det Du = 0$ ma $\text{Deg}(u, B(0,r), y) = \deg(\varphi) 1_{B(0,1)}(y)$.

Nella definizione della classe WOP potrebbe sembrare arbitraria la scelta di considerare il grado solo delle mappe ristrette a palle, la proposizione che segue mostra come in effetti avremmo potuto scegliere qualsiasi altro insieme con bordo liscio (o con modifiche minime liscio a tratti).

Per prima cosa fissiamo alcune notazioni, sia D un insieme aperto con bordo liscio, possiamo considerare la funzione:

$$d(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial D) & \text{se } x \in \Omega \setminus D \\ -\text{dist}(x, \partial D) & \text{se } x \in D \end{cases}$$

allora, grazie alla regolarità di ∂D , esiste un ε_0 tale che d ristretta a $\{x: \text{dist}(x, \partial D) \leq \varepsilon_0\}$ è liscia. Definiamo, per ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$:

$$D_\varepsilon = \{x \in \Omega: d(x) < \varepsilon\}$$

allora grazie alle osservazioni precedenti e al lemma di Sard D_ε sono aperti con bordo liscio per quasi ogni ε , inoltre $\nu_{D_\varepsilon} = Dd$.

Proposizione 5.7. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty \cap WOP$ e D un insieme con bordo liscio allora per quasi ogni ε abbastanza piccolo abbiamo che $u \in W^{1,p}(D_\varepsilon)$ e:

$$\text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) \geq 0.$$

Dimostrazione. Il fatto che $u \in W^{1,p}(D_\varepsilon)$ per quasi ogni ε è conseguenza della formula di coarea. Inoltre, ragionando come nella proposizione 5.6, si vede che, sempre per quasi ogni ε :

$$\text{Det } Du(D_\varepsilon) = \int \text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) dy.$$

Sia $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\vartheta \geq 0$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\text{div } g = \vartheta$, definiamo la distribuzione:

$$T_\vartheta(\varphi) = \int_\Omega g(u) \text{adj } Du \cdot D\varphi$$

che si vede facilmente essere ben definita. Ragionando sempre come nella proposizione 5.6, otteniamo che:

1. T_ϑ è una misura di Radon positiva,
2. per quasi ogni ε abbiamo:

$$T_\vartheta(D_\varepsilon) = \int \vartheta(y) \text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) dy.$$

Mostriamo per prima cosa che queste misure sono assolutamente continue rispetto a $\text{Det } Du$. Sia E un insieme tale che $\text{Det } Du(E) = 0$ e $A \supset E$ un aperto per cui $\text{Det } Du(A) < \sigma$, grazie al teorema di Besicovitch possiamo trovare una famiglia disgiunta \mathcal{B} di palle contenute in A e per cui vale:

1. $T_\vartheta(A) = \sum_{B \in \mathcal{B}} T_\vartheta(B)$
2. $T_\vartheta(B) = \int \vartheta(y) \text{Deg}(u, B, y) dy$ per ogni $B \in \mathcal{B}$
3. $\text{Det } Du(B) = \int \text{Deg}(u, B, y) dy$ per ogni $B \in \mathcal{B}$.

Abbiamo allora che:

$$\begin{aligned} T_\vartheta(E) &\leq T_\vartheta(A) = \sum_{B \in \mathcal{B}} T_\vartheta(B) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}} \int \vartheta \text{Deg}(u, B, y) dy \leq \|\vartheta\|_\infty \sum_{B \in \mathcal{B}} \int \text{Deg}(u, B, y) dy \\ &= \|\vartheta\|_\infty \sum_{B \in \mathcal{B}} \text{Det } Du(B) \leq \|\vartheta\|_\infty \text{Det } Du(A) \leq \|\vartheta\|_\infty \sigma \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di σ la tesi.

Consideriamo ora un insieme Θ denso e numerabile in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$ e sia ε tale che:

$$T_\vartheta(D_\varepsilon) = \int \vartheta(y) \text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) dy.$$

per ogni $\vartheta \in \Theta$, osserviamo che questo è vero per quasi ogni ε grazie alla numerabilità di Θ .

Grazie al teorema di Besicovitch possiamo trovare una famiglia palle disgiunte \mathcal{C} contenute in D_ε per cui vale:

1. $\text{Det } Du(D_\varepsilon \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B) = 0$
2. $T_\vartheta(B) = \int \vartheta(y) \text{Deg}(u, B, y) dy$ per ogni $B \in \mathcal{C}$ e per ogni $\vartheta \in \Theta$.

Grazie all'assoluta continuità delle T_ϑ rispetto a $\text{Det } Du$ abbiamo anche:

$$T_\vartheta(D_\varepsilon) = \sum_{B \in \mathcal{C}} T_\vartheta(B) + T_\vartheta(D_\varepsilon \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B) = \sum_{B \in \mathcal{C}} T_\vartheta(B)$$

per cui:

$$\begin{aligned} \int \vartheta(y) \text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) dy &= T_\vartheta(D_\varepsilon) = \sum_{B \in \mathcal{C}} T_\vartheta(B) = \\ \sum_{B \in \mathcal{C}} \int \vartheta(y) \text{Deg}(u, B, y) dy &= \int \vartheta(y) \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{Deg}(u, B, y) dy. \end{aligned}$$

per ogni $\vartheta \in \Theta$. Sia $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n: [0, +\infty))$ e $\vartheta_h \in \Theta$ una successione convergente uniformemente a ψ , allora, utilizzando il teorema di Lebesgue e il lemma di Fatou:

$$\begin{aligned} \int \psi(y) \text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) dy &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int \vartheta_h(y) \text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) dy \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int \vartheta_h(y) \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{Deg}(u, B, y) dy \\ &\geq \int \liminf_{h \rightarrow \infty} \vartheta_h(y) \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{Deg}(u, B, y) dy \geq 0. \end{aligned}$$

da cui $\text{Deg}(u, D_\varepsilon, y) \geq 0$ per quasi ogni y . □

Passiamo ora a dimostrare il teorema principale di questa sezione:

Teorema 5.8. *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty$, $p \in (n-1, n)$ e supponiamo che:*

1. $n \geq 3$;
2. $TV(u, \Omega) < \infty$;
3. $u \in WOP$;
4. *esiste un rappresentante di u continuo per quasi ogni $x \in \Omega$.*

Allora detta μ la misura del teorema 4.4 abbiamo che per ogni aperto A tale che $\mu(\partial A) = 0$:

$$\text{Det } Du(A) = \mu(A)$$

Osserviamo che a differenza del teorema 4.25 non siamo in grado di mostrare in questo caso che $TV_w = TV_s$.

Prima di dimostrare il teorema vorremmo discuterne rapidamente le ipotesi, la prima ci permette di utilizzare il Teorema di White ed è sostanzialmente topologica, l'esempio 1.22 illustra una mappa che soddisfa tutte le ipotesi del teorema tranne la prima e per cui si ha $|\text{Det}| < TV$.

La seconda serve ad applicare il teorema di Besicovitch, in effetti dalla dimostrazione segue che $TV_w^p(u, Q) < \infty$ per ogni cubetto ma da questo non si può dedurre che $TV(u, \Omega) < \infty$.

Per quanto riguarda la terza l'esempio 3.2 e il teorema 4.14 suggeriscono che un'ipotesi del genere sia necessaria in generale per l'uguaglianza tra $\text{Det } Du$ e TV .

L'ultima ipotesi viene usata solo nell'ultimo passaggio della dimostrazione, la condizione sembra esclusivamente tecnica ma al momento non siamo in grado di toglierla. Nell'ultima sezione mostriamo tuttavia come queste ipotesi siano soddisfatte da una classe ragionevole di mappe.

Dimostrazione del teorema 5.8. Ragionando come nel teorema 4.25 possiamo limitarci a mostrare che per ogni cubo $Q \subset \Omega$ di lato R :

$$TV_w^p(u, Q) \leq \text{Det } Du(Q).$$

Consideriamo la mappa u e una successione di mappe lisce $u_h \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\bar{Q})$ con $\|u_h\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, possiamo inoltre supporre che la convergenza sia tale per cui $\sum_h \|u_h\|_{W^{1,p}} < \infty$.

Utilizzando il lemma 4.17, abbiamo quindi che possiamo trovare una successione di raggi $r_k \rightarrow 0$ e una partizione di Q in $n_k = (C\frac{R}{r})^n$ cubetti $Q_{r_k}^i$ di lato $2r_k$ tali per cui:

1. $\text{Det } Du(Q_{r_k}^i) = \int \text{Deg}(u, Q_{r_k}^i, y) dy$
2. $\text{Det } Du(\cup_i \partial Q_{r_k}^i) = 0$
3. $\sum \int_{\partial Q_{r_k}^i} |Du|^p \leq \frac{M}{r_k} \int_Q |Du|^p$
4. $u_h \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\cup \partial Q_{r_k}^i)$, in particolare uniformemente.

Possiamo quindi, grazie alla proposizione 5.2, trovare per ogni k un $h(k)$ tale per cui:

1. $\|u_{h(k)} - u\|_{L^\infty(\cup \partial(Q_{r_k}^i))} \leq \frac{1}{k}$
2. $\int |\text{Deg}(u, Q_{r_k}^i, y) - \text{deg}(u_{h(k)}, Q_{r_k}^i, y)| \leq \frac{1}{kn_k}$ per $i = 1, \dots, n_k$.

Per ogni k e per ogni $i = 1, \dots, n_k$ applicando il corollario 1.21 alla mappa $u_{h(k)} \upharpoonright_{Q_{r_k}^i}$ otteniamo, per ogni σ positivo, una mappa g_k^i lipschitziana e tale per cui $g_k^i = u_{h(k)}$ su $\partial Q_{r_k}^i$ e:

$$\int_{Q_{r_k}^i} |\det Dg_k^i| \leq \int |\text{deg}(u_{h(k)}, Q_{r_k}^i, y)| dy + \frac{\sigma}{n_k}.$$

Deiniamo ora, su ogni cubetto $Q_{r_k}^i$:

$$v_k(x) = \begin{cases} u_{h(k)}\left(r_k \frac{x-x_i}{|x-x_i|_\infty} + x_i\right) & \text{se } \varrho_k \leq |x-x_i|_\infty \leq r_k \\ g_k^i\left(\frac{r_k}{\varrho_k} x\right) & \text{se } |x-x_i|_\infty \leq \varrho_k \end{cases}$$

dove x_i è il baricentro del cubetto e ϱ_k è una successione da scegliere in seguito. Se invece $Q_{r_k}^i$ è un parallelepipedo della partizione procediamo utilizzando la *jauge* già introdotta nella dimostrazione del teorema 4.25 (le modifiche al seguito sono minime).

Innanzitutto osserviamo che:

$$\begin{aligned} \int_Q |\det Dv_k| &= \sum_{i=1}^{n_k} \int_{Q_{r_k}^i} |\det Dv_k| \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left(\frac{r_k}{\varrho_k}\right)^n \int_{Q_{\varrho_k}^i} |\det Dg_k^i\left(\frac{r_k}{\varrho_k} x\right)| dx = \sum_{i=1}^{n_k} \int_{Q_{r_k}^i} |\det Dg_k^i(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_k} \int_{\mathbb{R}^n} |\text{deg}(u_{h(k)}, Q_{r_k}^i, y)| dy + \sigma \leq \sum_{i=1}^{n_k} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Deg}(u, Q_{r_k}^i, y) dy + \frac{1}{k} + \sigma \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \text{Det } Du(Q_{r_k}^i) + \frac{1}{k} + \sigma = \text{Det } Du(Q) + \frac{1}{k} + \sigma \end{aligned}$$

da cui passando al limite prima per $k \rightarrow \infty$ e poi per $\sigma \rightarrow 0$ avremmo la tesi se sapessimo mostrare che $v_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(Q)$.

Mostriamo intanto che la successione è limitata. Per prima cosa notiamo che essendo $\|u_h\|_\infty$ equi-limitata questo è vero anche per $\|v_k\|_\infty$, infatti l'unico problema potrebbe essere vicino al centro dei quadratini dove abbiamo le funzioni g_k^i , ma è immediato vedere che possiamo sostituirle con delle funzioni troncate in $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]^n$ senza aumentarne l'area dell'immagine (confronta la dimostrazione della proposizione 4.2). Abbiamo quindi:

$$\int_Q |v_k|^p \leq \|u\|_\infty^p |Q|.$$

Per quanto riguarda i gradienti invece, ricordando che $n_k = O(\frac{1}{r_k^n})$:

$$\begin{aligned}
\int_Q |Dv_k|^p &= \sum_{i=1}^{n_k} \int_{Q_{r_k}^i} |Dv_k|^p \\
&= \sum_{i=1}^{n_k} \int_{Q_{r_k}^i} \left| D_x \left(u_{h(k)} \left(r_k \frac{x - x_i}{|x - x_i|} + x_i \right) \right) \right|^p \\
&\quad + 2^n n_k \left(\frac{r_k}{\varrho_k} \right)^p (\varrho_k)^n \max_{i \in \{1, \dots, n_k\}} \text{Lip}(g_k^i)^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_k} r_k \int_{\partial Q_{r_k}^i} |Du_{h(k)}|^p + C(n, R) \left(\frac{\varrho_k}{r_k} \right)^{n-p} \max_{i \in \{1, \dots, n_k\}} \text{Lip}(g_k^i)^p \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^{n_k} r_k \int_{\partial Q_{r_k}^i} |Du(x)|^p + C(n, R) \left(\frac{\varrho_k}{r_k} \right)^{n-p} \max_{i \in \{1, \dots, n_k\}} \text{Lip}(g_k^i)^p \\
&\leq 2 \int_Q |Du|^p + C(n, R) \left(\frac{\varrho_k}{r_k} \right)^{n-p} \max_{i \in \{1, \dots, n_k\}} \text{Lip}(g_k^i)^p.
\end{aligned}$$

Scegliamo a questo punto ϱ_k in modo da soddisfare:

1. $\left(\frac{\varrho_k}{r_k} \right)^{n-p} \max_{i \in \{1, \dots, n_k\}} \text{Lip}(g_k^i)^p \rightarrow 0$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} |\cup_{i=1}^{n_k} Q_{\varrho_k}^i| < \infty$.

La prima proprietà ci assicura che $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_{W^{1,p}} \leq M$ mentre la seconda permette di applicare il lemma di Borel-Cantelli 1.3 e di affermare che, con l'eccezione di un insieme di misura nulla, ogni punto di Q appartenente a $\cup_{i=1}^{n_k} Q_{\varrho_k}^i$ solo per un numero finito di k .

Sia v_k è una sottosuccessione debolmente convergente, che esiste per la limitatezza delle norme, mostriamo che il limite è proprio u , questo al solito ci garantirà che tutta la successione converge ad u .

Per fare ciò basta mostrare che $v_k \rightarrow u$ quasi ovunque in Q , osserviamo che solo in questo passaggio usiamo il fatto che u sia continua quasi ovunque.

Sia $\varepsilon > 0$ e scegliamo un punto x_0 in cui u è continua e che appartiene solo ad un numero finito di $\cup_{i=1}^{n_k} Q_{\varrho_k}^i$, queste condizioni sono soddisfatte da quasi ogni punto. Sia $\delta > 0$ tale che:

$$\text{osc}_{B(x_0, \delta)} u < \varepsilon$$

esisterà allora un k abbastanza grande per cui $r_k \leq \delta$ e $x_0 \in Q_{r_k}^i \setminus Q_{\varrho_k}^i \subset B(x_0, \delta)$, pertanto:

$$\begin{aligned}
|v_k(x_0) - u(x_0)| &= \left| u_{h(k)} \left(r_k \frac{x_0 - x_i}{|x_0 - x_i|_\infty} + x_i \right) - u(x_0) \right| \\
&\leq \left| u_{h(k)} \left(r_k \frac{x_0 - x_i}{|x_0 - x_i|_\infty} + x_i \right) - u \left(r_k \frac{x_0 - x_i}{|x_0 - x_i|_\infty} + x_i \right) \right| \\
&\quad + \left| u \left(r_k \frac{x_0 - x_i}{|x_0 - x_i|_\infty} + x_i \right) - u(x_0) \right| \\
&\leq \|u_{h(k)} - u\|_{L^\infty(\partial Q_{r_k}^i)} + \text{osc}_{B(x_0, \delta)} u \leq \frac{1}{k} + \varepsilon
\end{aligned}$$

e quindi, per $k \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, la tesi. \square

5.2 MAPPE DEBOLMENTE MONOTONE

Mostriamo ora come le ipotesi del teorema 5.8 siano soddisfatte da una classe ragionevole di mappe.

Questa comprende l'insieme delle funzioni INV introdotto in [40] (al quale rimandiamo per ulteriori dettagli) nello studio di problemi di elasticità non lineare.

Definizione 5.9. Sia $u \in W^{1,p}(B(x,r) \cap W^{1,p}(\partial B(x,r)))$ definiamo per ogni raggio tale che $u \llcorner B(x,r)$ è continua:

$$\text{Im}_T(u, B(x,r)) = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus u(\partial B(x,r)) : \text{Deg}(u, B(x,r), y) \neq 0\}$$

Quindi $\text{Im}_T(u, B(x,r))$ è un insieme aperto e tale per cui³

$$\partial_* \text{Im}_T(u, B(x,r)) \subset u(\partial B(x,r)) \quad \text{modulo } \mathcal{H}^{n-1}.$$

Essa rappresenta in un certo modo l'insieme "racchiuso" da $u(\partial B(x,r))$.

Definizione 5.10. Diremo che una mappa $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è *debolmente monotona* se vale per quasi ogni $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$:

$$u(z) \in \text{Im}_T(u, (B(x,r)) \cup u(\partial B(x,r))) \quad \text{per quasi ogni } z \in B(x,r). \quad (5.4)$$

Definizione 5.11. Diremo che u soddisfa la condizione *INV* se per quasi ogni $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$:

1. $u(z) \in \text{Im}_T(u, (B(x,r)) \cup u(\partial B(x,r)))$ per quasi ogni $z \in B(x,r)$
2. $u(z) \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Im}_T(u, (B(x,r)) \cup u(\partial B(x,r)))$ per quasi ogni $z \in \Omega \setminus B(x,r)$.

Possiamo dare alle due condizioni la seguente interpretazione fisica: supponiamo che u stia descrivendo una deformazione del corpo Ω (eventualmente discontinua), allora la condizione (5.4) richiede che il materiale che si trova all'interno di una palletta non venga portato da u all'esterno dell'immagine della frontiera.

La condizione *INV* invece richiede anche che non ci sia interpenetrazione della materia ossia che materiale inizialmente al di fuori non venga portato all'interno.

Osserviamo però che non tutte le mappe regolari soddisfano la condizione *INV* come mostra la mappa $u(x,y) = (x^2, y)$. Viceversa è soddisfatta da ogni mappa regolare con $\det Du > 0$, questa condizione non è tuttavia necessaria come illustra la mappa $v(x,y) = (x, xy)$.

Si può mostrare, si veda [40], che se u soddisfa *INV* abbiamo:

1. se $\det Du \neq 0$ quasi ovunque allora $\text{Deg}(u, B(x,r), y) \in \{-1, 0, 1\}$
2. se $\det Du > 0$ quasi ovunque allora $\text{Deg}(u, B(x,r), y) \in \{0, 1\}$
3. se $\text{Deg}(u, B(x,r), y) \in \{0, 1\}$ e $\det Du \neq 0$ quasi ovunque allora $\det Du > 0$ quasi ovunque.

Inoltre se $\det Du > 0$ quasi ovunque si ha che esiste un insieme Ω_1 con $|\Omega \setminus \Omega_1| = 0$ e tale che $u \llcorner \Omega_1$ è iniettiva.

Per prima cosa mostriamo che le due proprietà sono chiuse rispetto alla topologia debole $W^{1,p}$:

Proposizione 5.12. Sia u_k una successione di mappe che soddisfano la condizione (5.4) (rispettivamente la condizione *INV*) e tali che $u_k \rightharpoonup u$, allora, se $p > n - 1$, abbiamo che anche u soddisfa (5.4) (rispettivamente *INV*).

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione solo nel caso di mappe debolmente monotone, essendo l'altra analoga. Scegliamo un raggio r tale che:

1. la condizione 5.4 sia soddisfatta rispetto a $B(x,r)$ per ogni k
2. $u_k \rightarrow u$ uniformemente su $\partial B(x,r)$
3. u_k, u sono continue su $\partial B(x,r)$

³ Se E è un insieme di perimetro finito indichiamo con $\partial_* E$ la sua frontiera essenziale, ossia l'insieme di salto di 1_E

osserviamo che grazie al lemma 5.5 quasi ogni r soddisfa queste condizioni a meno di sottosuccessioni.

Grazie al teorema di Egoroff per ogni δ esiste un compatto $K \subset B(x, r)$ con $|B(x, r) \setminus K| \leq \delta$ e per cui $u_k \upharpoonright K \rightarrow u \upharpoonright K$ uniformemente.

Sia $x \in K$, se $u(x) \in u(\partial B(x, r))$ non c'è niente da dimostrare, altrimenti grazie alla 2 e alla compattezza di $u(\partial B(x, r))$ abbiamo che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $u_k(\partial B(x, r)) \cap B(u(x), \varepsilon) = \emptyset$ per $k \geq k(\varepsilon)$ e, pertanto, $\text{Deg}(u_k, B(x, r), y)$ è costante per ogni $y \in B(u(x), \varepsilon)$.

Grazie alla convergenza uniforme su K abbiamo quindi che $u_k(x) \in B(u(x), \varepsilon)$ per k grande e, sfruttando la continuità del grado e il fatto che è a valori interi e costante su ogni componente connessa di $\mathbb{R}^n \setminus u(\partial B(x, r))$:

$$\begin{aligned} \text{Deg}(u, B(x, r), u(x)) &= \text{Deg}(u_k, B(x, r), u(x)) \\ &= \text{Deg}(u_k, B(x, r), u_k(x)) \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi $u(x) \in \text{Im}_T(u, B(x, r))$ per ogni $x \in K$. L'arbitrarietà di δ conclude la dimostrazione. \square

Mostriamo ora che se vale la condizione di monotonia, o analogamente la condizione INV , unita alla condizione di preservare l'orientamento allora vale una condizione di regolarità più forte per il rappresentante standard della classe di u .

Ricordiamo che questo è definito come:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy & \text{se il limite esiste} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e che detto P l'insieme in cui il limite non esiste si ha $\dim_{\mathcal{H}} P \leq n - p$.

Allora abbiamo che se u soddisfa 5.4 per ogni $x \in \Omega$ e quasi ogni raggio:

$$\bar{u}(y) \in \text{Im}_T(u, B(x, r)) \cup u(\partial B(x, r)) \text{ per ogni } y \in \overline{B(x, r)} \setminus P$$

Infatti supponiamo che $\bar{u}(y) \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Im}_T(u, B(x, r)) \cup u(\partial B(x, r))$, allora, essendo questo insieme aperto, abbiamo che esiste una palla $B(\bar{u}(y), \varepsilon)$ tutta contenuta. Per s piccolo:

$$\frac{1}{|B(y, s)|} \int_{B(y, s)} u(z) dz \in B(\bar{u}(y), \varepsilon)$$

ma questo è possibile solo se $|\{z \in B(y, s) : u(z) \in B(\bar{u}(y), \varepsilon)\}| > 0$.

Scelto s tale che $B(y, s) \subset B(x, r)$ si ha l'assurdo. In particolare abbiamo che $\bar{u}(x) \in \text{Im}_T(B(x, r)) \cup \bar{u}(\partial B(x, r))$ per ogni $x \in \Omega \setminus P$.

Notiamo che scelto il rappresentante standard l'insieme dei punti la cui immagine non stà nell'immagine topologica non dipende più dalla palla.

Teorema 5.13. *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $p > n - 1$ una mappa debolmente monotona che soddisfa WOP, allora esiste un rappresentante u^* di u ed un insieme NC tale che u^* è continua in ogni $x \in \Omega \setminus NC$, inoltre $\dim_{\mathcal{H}} NC \leq n - p$.*

Per prima cosa dimostriamo un lemma.

Lemma 5.14. *Sia u come nelle ipotesi del teorema 5.13, $x, z \in \Omega$ allora, per quasi ogni $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$, $s \in (0, \text{dist}(z, \partial B(x, r)))$, se $B(x, r) \subset B(z, s)$ abbiamo:*

$$\text{Im}_T(u, B(x, r) \cup u(\partial B(x, r))) \subset \text{Im}_T(u, B(z, s)) \cup u(\partial B(z, s))$$

Dimostrazione. Infatti grazie all'equazione (5.3) abbiamo che per quasi ogni r e s :

$$\text{Deg}(u, B(z, s), y) = \text{Deg}(u, B(x, r), y) + \text{Deg}(u, B(z, s) \setminus B(x, r), y)$$

e quindi grazie alla proposizione 5.7 e alla condizione *WOP*:

$$0 \leq \text{Deg}(u, B(x, r), y) \leq \text{Deg}(u, B(z, s), y)$$

Osservando che

$$\mathbb{R}^n \setminus \text{Im}_T(u, B(z, s)) \cup u(\partial B(z, s)) = \{\text{Deg}(u, B(z, s), y) = 0\}$$

abbiamo

$$\text{Im}_T(u, B(x, r)) \subset \text{Im}_T(u, B(z, s)) \cup u(\partial B(z, s)),$$

inoltre detto $P = \{w \in B(z, s) : u(w) \notin \text{Im}_T(B(z, s)) \cup u(\partial B(z, s))\}$ abbiamo che per quasi ogni r :

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, r) \cap P) = 0$$

e quindi per questi raggi:

$$u(\partial B(x, r)) \subset \text{Im}_T(B(z, s)) \cup u(\partial B(z, s))$$

da cui la tesi. \square

Chiamiamo, per ogni punto $x \in \Omega$, $R(x)$ l'insieme dei raggi in $(0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$ in cui è soddisfatta la condizione 5.4 e definiamo per ogni $r \in R(x)$ tale che $u \upharpoonright \partial B(x, r)$ è continua:

$$F(B(x, r)) = \text{Im}_T(u, B(x, r)) \cup u(\partial B(x, r)).$$

Si vede facilmente che $F(B(x, r))$ è un compatto non vuoto la cui frontiera è contenuta in $u(\partial B(x, r))$ e quindi $\text{diam}(F(B(x, r))) \leq \text{osc}_{\partial B(x, r)} u$.

Definiamo inoltre per ogni $x \in \Omega$

$$F(x) = \bigcap_{r \in R(x)} F(B(x, r))$$

che è anche esso un compatto non vuoto essendo, grazie al lemma precedente, $F(B(x, r_1)) \subset F(B(x, r_2))$ se $r_1 < r_2$.

Dimostrazione del teorema 5.13. Chiamiamo

$$NC := P \cup \{x : \text{diam}F(x) > 0\}$$

e definiamo il rappresentante di u :

$$u^*(x) := \begin{cases} \bar{u}(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus NC \\ \text{qualsiasi elemento di } F(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

abbiamo che $u^*(x) \in F(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Sia $x \in \Omega \setminus NC$, allora

$$\limsup_{r \rightarrow 0} (\text{diam}F(B(x, r))) \leq \text{diam}F(x) = 0$$

quindi, per ogni ε , possiamo trovare un r tale che $F(B(x, r)) \subset B(u^*(x), \varepsilon)$. Allora per ogni $y \in B(x, r)$ abbiamo, dal lemma precedente, che esiste un raggio s_y tale che:

$$F(B(y, s_y)) \subset F(B(x, r)) \subset B(u^*(x), \varepsilon)$$

la continuità si ottiene poi osservando che:

$$u^*(y) \in F(y) \subset F(B(y, s_y)).$$

Passiamo ora a stimare la dimensione di Hausdorff di NC , per ottenere la tesi basta mostrare che, detto $D = \{x: \text{diam}F(x) > 0\}$, questo ha dimensione minore o uguale a $n - p$.

Sia $x \in D$ allora esiste un $a(x) > 0$ tale che per ogni $\rho \in R(x)$:

$$0 < a(x) \leq \text{diam}F(x) \leq \text{osc}_{\partial B(x, \rho)} u$$

ma per la disuguaglianza di Morrey:

$$\text{osc}_{\partial B(x, \rho)} u \leq C(n, p) \rho^{1 - \frac{n-1}{p}} \left(\int_{\partial B(x, \rho)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

da cui:

$$a(x)^p \leq C \rho^{p-n+1} \int_{\partial B(x, \rho)} |Du|^p$$

e integrando su $(0, r) \cap R(x)$ abbiamo:

$$a(x)r^{n-p} \leq \int_{B(x, r)} |Du|^p$$

da cui:

$$D \subset \left\{ x: \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n-p}} \int_{B(x, r)} |Du|^p > 0 \right\}$$

e quest'ultimo insieme ha dimensione di Hausdorff minore di $n - p$, si veda [46]. \square

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Alberti. Distributional Jacobian and singularities of Sobolev maps. *Ricerche Mat.*, 54(2):375–394 (2006), 2005.
- [2] G. Alberti, S. Baldo, and G. Orlandi. Functions with prescribed singularities. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 5(3):275–311, 2003. (Citato alle pagine 13 e 31.)
- [3] J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 63(4):337–403, 1976/77. (Citato a pagina 3.)
- [4] J. M. Ball. Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 306(1496):557–611, 1982. (Citato a pagina 3.)
- [5] F. Bethuel. A characterization of maps in $H^1(B^3, S^2)$ which can be approximated by smooth maps. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7(4):269–286, 1990. (Citato alle pagine 4 e 31.)
- [6] F. Bethuel. The approximation problem for Sobolev maps between two manifolds. *Acta Math.*, 167(3-4):153–206, 1991. (Citato alle pagine 4, 13 e 44.)
- [7] G. Bouchitté, I. Fonseca, and J. Malý. The effective bulk energy of the relaxed energy of multiple integrals below the growth exponent. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 128(3):463–479, 1998. (Citato a pagina 41.)
- [8] H. Brezis and L. Nirenberg. Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries. *Selecta Math. (N.S.)*, 1(2):197–263, 1995. (Citato a pagina 15.)
- [9] H. Brezis and L. Nirenberg. Degree theory and BMO. II. Compact manifolds with boundaries. *Selecta Math. (N.S.)*, 2(3):309–368, 1996. With an appendix by the authors and Petru Mironescu. (Citato a pagina 15.)
- [10] S. Conti and C. De Lellis. Some remarks on the theory of elasticity for compressible Neohookean materials. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2(3):521–549, 2003. (Citato a pagina 29.)
- [11] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*, volume 78 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2008. (Citato alle pagine 3, 22 e 57.)
- [12] B. Dacorogna and P. Marcellini. Semicontinuité pour des intégrandes polyconvexes sans continuité des déterminants. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311(6):393–396, 1990. (Citato alle pagine 4 e 35.)
- [13] C. De Lellis. Some fine properties of currents and applications to distributional Jacobians. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 132(4):815–842, 2002. (Citato a pagina 30.)
- [14] C. De Lellis. Some remarks on the distributional Jacobian. *Nonlinear Anal.*, 53(7-8):1101–1114, 2003. (Citato a pagina 30.)
- [15] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. (Citato alle pagine 6 e 11.)

- [16] H. Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. (Citato alle pagine 6, 17, 20 e 21.)
- [17] I. Fonseca, N. Fusco, and P. Marcellini. On the total variation of the Jacobian. *J. Funct. Anal.*, 207(1):1–32, 2004. (Citato a pagina 34.)
- [18] I. Fonseca, N. Fusco, and P. Marcellini. Topological degree, Jacobian determinants and relaxation. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 8(1):187–250, 2005. (Citato a pagina 34.)
- [19] I. Fonseca and W. Gangbo. *Degree theory in analysis and applications*, volume 2 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. Oxford Science Publications. (Citato alle pagine 6, 14 e 55.)
- [20] I. Fonseca and G. Leoni. *Modern methods in the calculus of variations: L^p spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007. (Citato alle pagine 6 e 9.)
- [21] I. Fonseca and J. Malý. Relaxation of multiple integrals below the growth exponent. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(3):309–338, 1997. (Citato alle pagine 36 e 37.)
- [22] I. Fonseca and P. Marcellini. Relaxation of multiple integrals in subcritical Sobolev spaces. *J. Geom. Anal.*, 7(1):57–81, 1997. (Citato a pagina 34.)
- [23] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 106(2):97–159, 1989.
- [24] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. Graphs of finite mass which cannot be approximated in area by smooth graphs. *Manuscripta Math.*, 78(3):259–271, 1993.
- [25] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. Remarks on the degree theory. *J. Funct. Anal.*, 125(1):172–200, 1994. (Citato a pagina 55.)
- [26] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. *Cartesian currents in the calculus of variations. I*, volume 37. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Cartesian currents. (Citato alle pagine 6, 21 e 57.)
- [27] F. Hang and F. Lin. Topology of Sobolev mappings. II. *Acta Math.*, 191(1):55–107, 2003. (Citato a pagina 13.)
- [28] M. W. Hirsch. *Differential topology*. Springer-Verlag, New York, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 33. (Citato a pagina 6.)
- [29] R. L. Jerrard and H. M. Soner. Functions of bounded higher variation. *Indiana Univ. Math. J.*, 51(3):645–677, 2002. (Citato a pagina 30.)
- [30] P. Marcellini. On the definition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 3(5):391–409, 1986. (Citato alle pagine 3 e 34.)
- [31] P. Marcellini. The stored-energy for some discontinuous deformations in nonlinear elasticity. In *Partial differential equations and the calculus of variations, Vol. II*, volume 2 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 767–786. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989. (Citato alle pagine 3 e 34.)
- [32] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original. (Citato a pagina 6.)

- [33] F. Morgan. *Geometric measure theory*. Academic Press Inc., San Diego, CA, third edition, 2000. A beginner's guide. (Citato a pagina 6.)
- [34] C. B. Morrey, Jr. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1966 edition [MR0202511]. (Citato a pagina 3.)
- [35] D. Mucci. Approximation in area of graphs with isolated singularities. *Manuscripta Math.*, 88(2):135–146, 1995. (Citato a pagina 43.)
- [36] D. Mucci. Remarks on the total variation of the Jacobian. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 13(2):223–233, 2006. (Citato alle pagine 34 e 43.)
- [37] S. Müller. $\text{Det} = \det$. A remark on the distributional determinant. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311(1):13–17, 1990. (Citato a pagina 30.)
- [38] S. Müller. On the singular support of the distributional determinant. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 10(6):657–696, 1993.
- [39] S. Müller, T. Qi, and B. S. Yan. On a new class of elastic deformations not allowing for cavitation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 11(2):217–243, 1994. (Citato a pagina 55.)
- [40] S. Müller and S. J. Spector. An existence theory for nonlinear elasticity that allows for cavitation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 131(1):1–66, 1995. (Citato alle pagine 3, 4, 5, 55, 63 e 64.)
- [41] S. Müller, S. J. Spector, and Q. Tang. Invertibility and a topological property of Sobolev maps. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(4):959–976, 1996. (Citato a pagina 13.)
- [42] E. Paolini. On the relaxed total variation of singular maps. *Manuscripta Math.*, 111(4):499–512, 2003. (Citato alle pagine 19, 34, 41 e 44.)
- [43] L. Simon. *Lectures on geometric measure theory*, volume 3 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983. (Citato a pagina 6.)
- [44] V. Šverák. Regularity properties of deformations with finite energy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 100(2):105–127, 1988. (Citato a pagina 4.)
- [45] B. White. Existence of least-area mappings of N -dimensional domains. *Ann. of Math. (2)*, 118(1):179–185, 1983. (Citato alle pagine 5 e 18.)
- [46] W. P. Ziemer. *Weakly differentiable functions*, volume 120 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation. (Citato alle pagine 6, 13, 21, 31 e 67.)

LISTA DEI SIMBOLI

$(M)_r$	$\{x: \text{dist}(x, M) < r\}$
1_E	Funzione indicatrice di E
$A \subset\subset B$	\bar{A} è un sottoinsieme compatto di B
$B(x, r)$	Palla aperta di centro x e raggio r
$C^m(\Omega)$	Spazio delle funzioni m -volte derivabili con derivata m -esima continua
$C_c^m(\Omega)$	$C_c^0(\Omega) \cap C^m(\Omega)$
Df	Gradiente di f
V^*	Duale topologico di V
$\text{Lip } f$	Costante di Lipschitz di f
\mathbb{S}^{n-1}	∂B
$\mathbb{M}(T)$	Massa di T
\mathcal{H}^k	Misura di Hausdorff k -dimensionale
\mathcal{L}^n	Misura di Lebesgue n -dimensionale
$\mathcal{R}^k(U)$	Correnti k -dimensionali rettificabili
$\mu \llcorner E$	Restrizione della misura μ ad E
$\partial_i f \quad \frac{\partial f}{\partial x^i}$	Derivata di f rispetto ad x^i
$f \llcorner E$	Restrizione della funzione f ad E
x^j	j -esima coordinata di x
B	$B(0, 1)$
$C_c^0(X; \mathbb{R}^k)$	Spazio delle funzioni continue a supporto compatto da X in \mathbb{R}^k
$\mathcal{D}(U)$	Spazio delle funzioni test
$\mathcal{D}^k(U)$	Correnti k -dimensionali
ω_n	Misura di Lebesgue di B
\bar{E}	Chiusura di E
∂E	Frontiera topologica di E
$x = (x^1, \dots, x^n)$	Punto di \mathbb{R}^n
$x \cdot y \quad \langle x, y \rangle$	Prodotto scalare tra x e y