UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2008/2009

Relazione finale

di Ermanno Cioni

Dinamica dei polinomi quadratici complessi e insiemi di Julia

relatore: Emanuele Paolini

Introduzione

La dinamica dei polinomi quadratici complessi è parte del più vasto argomento della dinamica delle funzioni analitiche complesse, ovvero del loro comportamento sotto iterazione. I primi a compiere studi in questo campo furono matematici come Leau, Schröder, Koenigs e Böttcher a cavallo tra Ottocento e Novecento, i quali focalizzarono il loro interesse principalmente sul comportamento locale dell'iterazione delle funzioni complesse intorno a loro punti fissi. Attorno agli anni venti del Novecento, due matematici francesi, Gaston Julia e Pierre Fatou, si cimentarono anch'essi nello studio della dinamica complessa e lo fecero, a differenza dei loro predecessori, concentrando l'attenzione sul comportamento globale, e non più locale, delle iterazioni. Fu questo cambio di punto di vista a dare alla materia nuovo e vasto sviluppo e ad aprire prospettive fino ad allora impensate, tanto che per tutto il Novecento la dinamica complessa è stata oggetto di studio di numerosi matematici ed è ancor oggi campo di ricerca fra i più fiorenti.

Preliminari

Nell'affrontare l'argomento della dinamica dei polinomi quadratici complessi, faremo ovviamente uso di concetti e risultati provenienti dall'analisi complessa. Fra questi, vale la pena di ricordarne tre che risulteranno importanti per i nostri scopi:

- Definizione di famiglia normale (che verrà riproposta a pagina 4).

- Teorema di Montel: Sia $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una famiglia di funzioni olomorfe su un aperto U di $\mathbf{C}$. Siano $a \neq b$ in $\mathbf{C}$ tali che $F_n(z) \notin \{a, b\}$, per ogni n in $\mathbf{N}$, per ogni z in U. Allora $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è una famiglia normale su U.

- Teorema delle contrazioni: Sia data una funzione $f(z)$ olomorfa su un disco aperto D del piano $\mathbf{C}$. Sia $|f'(z)| < \mu < 1$, per ogni $z \in D$. Allora, per ogni z, w in D, si ha che $|f(z) - f(w)| < \mu|z - w|$.

Iterazione di polinomi e punti periodici

Come abbiamo detto, lo scopo di queste pagine è quello di introdurre ai principali aspetti della dinamica dei polinomi quadratici complessi, ovvero del comportamento dei polinomi della forma $z^2 + c$ quando essi vengono iterati, cioè applicati ripetutamente. Osserviamo che la dinamica di un generico polinomio di secondo grado si può ricondurre a quella dei polinomi di questo tipo, mediante opportuni riscalamenti e traslazioni.

Occorre dire che, nel prosieguo, considereremo ogni polinomio $P(z)$ come applicazione $\overline{P}(z)$ estesa a tutta la sfera di Riemann $\overline{\mathbf{C}}$, ovvero: $\overline{P}(z) = P(z)$ se $z \in \mathbf{C}$ e $\overline{P}(z) = \infty$ se $z = \infty$; tuttavia continueremo sempre a chiamare il polinomio semplicemente $P(z)$.

Sia dunque $P(z)$ un polinomio e sia $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$. La successione di punti:

$$z_0, P(z_0), P^2(z_0), P^3(z_0), \ldots, P^n(z_0), \ldots,$$

dove

$$P^n = \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n\ volte},$$

è detta l'*orbita* del punto z_0 sotto $P(z)$ e, quando $P(z) = z^2 + c$, la si indica con $O(z_0)$.

Definizione 1. Un punto $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ si dice *punto periodico* per il polinomio $P(z)$ se esiste un intero positivo k tale che $P^k(z_0) = z_0$. Il più piccolo intero positivo n per cui $P^n(z_0) = z_0$ è detto *periodo* del punto z_0. Se il periodo di un punto z_0 è uguale a 1, allora z_0 è detto *punto fisso* per $P(z)$.

Definizione 2. Sia $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ un punto periodico di periodo n per il polinomio $P(z)$. Allora z_0 è detto:

- *attrattivo* se $|(P^n)'(z_0)| < 1$;
- *repulsivo* se $|(P^n)'(z_0)| > 1$;
- *neutro* se $|(P^n)'(z_0)| = 1$.

È chiaro che, se z_0 è un punto periodico di periodo s per $P(z)$, allora l'orbita

$$\{z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P^2(z_0), z_3 = P^3(z_0), \ldots,\ z_{s-1} = P^{s-1}(z_0)\}$$

è un insieme finito di punti, e ognuno di questi punti è un punto periodico di periodo s per $P(z)$. Inoltre, siccome

$$(P^s)'(z) = P'(P^{s-1}(z)) \cdot P'(P^{s-2}(z)) \cdot P'(P^{s-3}(z)) \cdot \cdots \cdot P'(P(z)) \cdot P'(z),$$

allora è facile capire che, se z_0 è attrattivo (risp. repulsivo, neutro), anche gli altri punti dell'orbita

$$z_1, z_2, z_3, \ldots,\ z_{s-1}$$

sono attrattivi (risp. repulsivi, neutri). Per questi motivi, l'orbita di un punto periodico è detta *periodica* e, se esso è attrattivo (risp. repulsivo, neutro), la sua orbita è detta *periodica attrattiva* (risp. *repulsiva*, *neutra*).

Definizione 3. Sia $c \in \mathbf{C}$ e sia $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ un punto periodico attrattivo di periodo m per il polinomio $Q_c(z) = z^2 + c$. Si definisce *bacino d'attrazione* di z_0 l'insieme:

$$A(z_0) = \{z \in \overline{\mathbf{C}} : \lim_{n \to \infty} Q_c^{mn}(z) = z_0\}.$$

Grazie al teorema delle contrazioni e al teorema di invertibilità locale è possibile giungere a due importanti conclusioni: i teoremi 4 e 5.

Teorema 4. *Sia f una funzione olomorfa su un aperto $A \subseteq \mathbf{C}$ e sia $z_0 \in A$ con $0 \leq |f'(z_0)| < 1$ e $f(z_0) = z_0$. Allora esiste un intorno aperto U di z_0, con $U \subseteq A$, tale che, per ogni z in U,*

$$\lim_{n \to \infty} f^n(z) = z_0.$$

Dimostrazione. Dato che $|f'(z_0)| < 1$, allora per continuità esiste un disco $D(z_0, \delta) = U \subseteq A$ per cui vale $|f'(z)| < \mu < 1$ per ogni z in U, per un certo μ reale. Questo perchè $|f'(z_0)| < 1$ implica che esista μ reale tale che $|f'(z_0)| < \mu < 1$. Se ora si prende $z \in U$ arbitrario, allora, per il teorema delle contrazioni,

$$|f(z) - f(z_0)| < \mu|z - z_0|,$$

da cui

$$|f(z) - z_0| < \mu|z - z_0| < \delta\mu,$$

che implica

$$f(U) \subseteq D(z_0, \delta\mu).$$

Proseguendo abbiamo che

$$\begin{aligned} |f^2(z) - f^2(z_0)| &= |f(f(z)) - f(f(z_0))| < \mu|f(z) - f(z_0)| \\ &< \mu^2|z - z_0| < \delta\mu^2, \quad \forall z \in U. \end{aligned}$$

Da ciò si ha

$$|f^2(z) - z_0| < \delta\mu^2, \quad \forall z \in U \qquad \Longrightarrow \qquad f^2(U) \subseteq D(z_0, \delta\mu^2).$$

Per induzione si può dimostrare che

$$f^n(U) \subseteq D(z_0, \delta\mu^n), \quad \forall n \geq 0.$$

Per cui

$$\forall z \in U, \forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, |f^n(z) - z_0| < \delta\mu^n < \delta\mu^N < \epsilon.$$

E quindi

$$\forall z \in U, \quad \lim_{n\to\infty} f^n(z) = z_0.$$

□

Teorema 5. *Sia f una funzione olomorfa su un aperto $A \subseteq \mathbf{C}$ e sia $z_0 \in A$ con $f(z_0) = z_0$ e $|f'(z_0)| > 1$. Allora esiste un intorno aperto B di z_0, con $B \subseteq A$, tale che, per ogni z in $B \setminus \{z_0\}$, esiste s in $\mathbf{N}$ tale che:*

$$f^s(z) \notin B.$$

Sapendo, dalle definizioni, che un punto periodico attrattivo (risp. repulsivo) per Q_c di periodo m, è un punto fisso attrattivo (risp. repulsivo) per il polinomio Q_c^m, allora, applicando i teoremi 4 e 5 ai polinomi Q_c e Q_c^n, per $n \in \mathbf{N}$, si possono avere grandi indicazioni su come si comportino i polinomi $Q_c(z)$ vicino a loro punti fissi o periodici attrattivi o repulsivi, e si comprende quanto sia giusto l'uso degli aggettivi "attrattivo" e "repulsivo" per questi speciali punti.

Vogliamo adesso fissare la nostra attenzione su un punto particolare della sfera di Riemann $\overline{\mathbf{C}}$, il punto ∞. Dall'analisi complessa sappiamo che, per vedere come si comporta il polinomio quadratico Q_c vicino a ∞, bisogna guardare il comportamento della funzione

$$g(z) = \frac{1}{Q_c(\frac{1}{z})} = \frac{z^2}{1 + cz^2}$$

vicino a zero. Abbiamo che $g(0) = 0$, dunque 0 è un punto fisso per g e dunque ∞ è un punto fisso per Q_c; inoltre $g'(0) = 0$, da cui $Q'_c(\infty) = g'(0) = 0$ e quindi, in definitiva, ∞ è un punto fisso attrattivo per Q_c. Ora, dato che $g(z)$ è olomorfa in un intorno A di $z = 0$, applicando a $g(z)$ il teorema 4 e notando che

$$g^n(z) = \frac{1}{Q_c^n(\frac{1}{z})},$$

per ogni $n \geq 1$, è facile dimostrare che per ogni $c \in \mathbf{C}$, esiste $R > 0$ tale che, per ogni z con $|z| > R$,

$$\lim_{n\to\infty} Q_c^n(z) = \infty.$$

In conclusione, per ogni $c \in \mathbf{C}$, esiste un raggio R tale che l'insieme $\overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{D(0, R)}$ è tutto contenuto nel bacino d'attrazione di ∞, che è punto fisso attrattivo per Q_c.

Insiemi di Julia e di Fatou

Il comportamento di un polinomio $Q_c(z) = z^2 + c$ sotto iterazione dipende fortemente dalla posizione, all'interno di $\overline{\mathbf{C}}$, del punto iniziale z dell'iterazione $\{Q_c^n(z)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Infatti, se z appartiene ad un certo insieme $J(Q_c) \subset \overline{\mathbf{C}}$, detto *insieme di Julia* del polinomio Q_c, allora il comportamento di Q_c risulta *caotico* (in un senso che spiegheremo meglio più avanti), mentre se $z \in F(Q_c) = \overline{\mathbf{C}} \setminus J(Q_c)$, detto *insieme di Fatou* di Q_c, il comportamento di Q_c è completamente opposto, ed è detto *stabile*.

L'insieme di Julia di Q_c è così definito:

Definizione 6. È detto *insieme di Julia* del polinomio $Q_c(z) = z^2 + c$, e lo si indica con $J(Q_c)$, la chiusura dell'insieme dei punti periodici repulsivi di Q_c. È detto *insieme di Fatou* del polinomio $Q_c(z)$ l'insieme $F(Q_c) = \overline{\mathbf{C}} \setminus J(Q_c)$.

Caratteristiche importanti degli insiemi di Julia e di Fatou dei polinomi Q_c sono che $F(Q_c)$ è un aperto della sfera di Riemann (è ovvio dalla definizione 6), $J(Q_c)$ è un compatto di $\mathbf{C}$ ed inoltre $J(Q_c) \subseteq \overline{D(0, R)}$, dove R è il raggio di cui precedentemente abbiamo parlato, relativamente al bacino d'attrazione di ∞. Altresì è di fondamentale importanza il fatto che ogni bacino d'attrazione di un punto periodico attrattivo di Q_c è contenuto in $F(Q_c)$.

In certi, rari, casi gli insiemi di Julia sono molto "semplici"; ciò accade, ad esempio, per $Q_0(z) = z^2$. Può essere visto facilmente che per questo polinomio l'insieme di Julia è semplicemente la circonferenza unitaria di centro l'origine.

Famiglie normali

Introduciamo adesso il concetto di "famiglia normale" e vediamo alcuni risultati ad esso relativi, che sono potenti strumenti per la comprensione delle proprietà degli insiemi di Julia e di Fatou.

Definizione 7. Sia $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una famiglia di funzioni olomorfe su un aperto $A \subseteq \mathbf{C}$ e sia U un aperto contenuto in A. $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si dice *famiglia normale su U* se ogni sottosuccessione $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ di $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ha una sottosuccessione $\{F_{n_{k_r}}\}_{r\in\mathbf{N}}$ per la quale valga una delle due seguenti affermazioni:

1) esiste $g(z)$ olomorfa su U tale che $\{F_{n_{k_r}}\}_{r\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente sui compatti di U a g.

2) $\{F_{n_{k_r}}\}_{r\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente a ∞ su U.

Sia ora $z_0 \in A$. $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si dice *famiglia normale in* z_0 se esiste un intorno aperto V di z_0, con $V \subseteq A$, tale che $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è una famiglia normale su V.

Teorema 8. *Sia $z_0 \in J(Q_c)$. Allora $\{Q_c^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ non è una famiglia normale in z_0.*

Come conseguenza del teorema di Montel otteniamo subito:

Proposizione 9. *Se $\{Q_c^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ non è una famiglia normale in un punto $z_0 \in \mathbf{C}$, allora per ogni intorno U di z_0 in $\mathbf{C}$, l'insieme $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_c^n(U)$ omette al massimo un punto di $\mathbf{C}$ (ovvero esiste $a \in \mathbf{C}$ tale che $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_c^n(U) \supseteq \mathbf{C} \setminus \{a\}$).*

Da semplici considerazioni si ottiene inoltre che:

Proposizione 10. *Sia $Q_0(z) = z^2$ e sia $z_0 \in J(Q_0)$ (ovvero sia z_0 tale che $|z_0| = 1$). Allora per ogni intorno U di z_0 in $\mathbf{C}$, l'insieme $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_0^n(U)$ omette al massimo lo zero.*

Proprietà degli insiemi di Julia

Dal teorema di Montel e dai fondamentali risultati sulle famiglie normali enunciati sopra, discende una serie di affermazioni che evidenziano caratteristiche di rilievo degli insiemi di Julia dei polinomi $Q_c(z)$. Il primo fatto importante è che $J(Q_c)$ è non vuoto; lo si dimostra facendo vedere che per ogni polinomio $Q_c(z)$ esiste un'orbita periodica repulsiva. Guardiamo innanzitutto quali sono i punti fissi in $\mathbf{C}$ di $Q_c(z)$. $z^2 + c = z$ se e solo se

$$z \in \{\frac{1-\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}\} ,$$

(dove δ e $-\delta$ sono le due radici complesse di $1 - 4c$). Ovviamente i due punti fissi coincidono se e solo se $\delta = 0$, cioè quando $1-4c = 0$, ovvero $c = \frac{1}{4}$. Nel caso in cui $c \neq \frac{1}{4}$, abbiamo che $\delta \neq 0$ e che o $\Re(-\delta) \geq 0$ o $\Re(\delta) \geq 0$. Supponiamo, senza perdere in generalità, che $\Re(\delta) \geq 0$. Se $\Re(\delta) = 0$, allora

$$|1 + \delta| = \sqrt{1 + |\delta|^2} > 1 ,$$

quindi esiste un punto fisso z per Q_c tale che

$$|Q_c'(z)| = 2|z| = |2z| > 1$$

e quindi esiste un punto fisso repulsivo per Q_c. Se invece $\Re(\delta) > 0$, allora

$$|1 + \delta| \geq \Re(1 + \delta) = 1 + \Re(\delta) > 1$$

e si giunge alla medesima conclusione. Nel caso $c = \frac{1}{4}$, $Q_c(z)$ è $Q_{\frac{1}{4}}(z) = z^2 + \frac{1}{4}$ e $z = \frac{1}{2}$ è l'unico punto fisso di $Q_{\frac{1}{4}}$. Esso è radice di $Q^2_{\frac{1}{4}}(z) - z$ e si ha che $Q^2_{\frac{1}{4}}(z) - z = 0$ se e solo se

$$(2z - 1)^2(4z^2 + 4z + 5) = 0.$$

Si vede che $4z^2 + 4z + 5 = 0$ quando

$$z \in \{\frac{2i-1}{2}, \frac{-2i-1}{2}\} = \{a, b\}.$$

Dunque $Q^2_{\frac{1}{4}}(a) = a$ e

$$(Q^2_{\frac{1}{4}})'(a) = Q'_{\frac{1}{4}}(Q_{\frac{1}{4}}(a))Q'_{\frac{1}{4}}(a) = 2((\frac{2i-1}{2})^2 + \frac{1}{4})2\frac{2i-1}{2} = 5 \ ,$$

che ha norma maggiore di 1. In definitiva a è un punto periodico repulsivo di periodo 2 per $Q_{\frac{1}{4}}(z)$, cosicchè $Q_{\frac{1}{4}}$ ha un'orbita periodica repulsiva.

Definizione 11. Definiamo *insieme pieno di Julia* del polinomio $Q_c(z)$, e lo denotiamo con $K(Q_c)$, l'insieme dei punti di $\mathbf{C}$ le cui orbite sotto Q_c sono limitate, ovvero

$$K(Q_c) = \{z \in \mathbf{C} : \text{ esiste } L \in \mathbf{R} \text{ tale che } |Q_c^n(z)| \leq L, \text{ per ogni } n \geq 0\}.$$

Detto $A(\infty)$ il bacino d'attrazione di ∞, abbiamo che

$$K(Q_c) = \complement A(\infty) \ ,$$

dove $\complement A(\infty)$ è il complementare in $\overline{\mathbf{C}}$ di $A(\infty)$. Infatti, se $z \in K(Q_c)$, allora l'orbita di z sotto Q_c è limitata e dunque esiste L reale tale che

$$|Q_c^n(z)| \leq L \text{ per ogni } n \geq 0 \ ,$$

da cui la successione $\{Q_c^n(z)\}_{n\in\mathbf{N}}$ non può tendere a ∞. Mentre, se $z \notin K(Q_c)$, allora per ogni $L \in \mathbf{R}$, esiste $n_0 \geq 0$ tale che

$$|Q_c^{n_0}(z)| > L \ ,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} Q_c^n(z) = \infty$$

e quindi $z \in A(\infty)$. È utile sottolineare che $K(Q_c)$ è un insieme limitato: infatti, se $z \in K(Q_c)$, allora $|z| \leq R$, dove R è il raggio di cui abbiamo trattato alcune pagine addietro in relazione col bacino d'attrazione di ∞. Più precisamente, è facile notarlo, $K(Q_c)$ è un compatto di $\mathbf{C}$. Da queste considerazioni si evincono due utili risultati: le proposizioni 12 e 13.

Proposizione 12. $\partial K(Q_c) = \{z \in \mathbf{C}$ *: per ogni intorno* U *di* z *in* $\mathbf{C}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_c^n(U)$ *omette al massimo un punto di* $\mathbf{C}\} = \{z \in \mathbf{C}$ *:* $\{Q_c^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *non è una famiglia normale in* $z\}$.

Proposizione 13. *Sia* $c \neq 0$*. Allora:*

$$\partial K(Q_c) = \{z \in \mathbf{C} : \textit{ per ogni intorno } U \textit{ di } z \textit{ in } \mathbf{C}, \ \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_c^n(U) = \mathbf{C}\}.$$

In queste proposizioni, e nel prosieguo, il simbolo "∂" indica la "frontiera" dell'insieme in questione e, per quanto riguarda il significato, in questo contesto, delle parole "omette al massimo un punto di $\mathbf{C}$", si veda la proposizione 9.

A questo punto siamo in grado di provare due teoremi che sono ulteriori caratterizzazioni degli insiemi di Julia dei polinomi Q_c.

Teorema 14. $J(Q_c) = \{z \in \mathbf{C} : \{Q_c^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *non è una famiglia normale in* $z\}$.

Da cui, grazie alla proposizione 12, abbiamo subito:

Teorema 15. $J(Q_c) = \partial K(Q_c)$.

Il teorema 14 sancisce che è vero anche l'inverso del teorema 8, mentre il teorema 15 mostra il fatto fondamentale che $J(Q_c)$ altro non è che la frontiera dell'insieme dei punti le cui orbite sotto Q_c sono limitate. Giacché $K(Q_c)$ è chiuso, esso contiene la sua frontiera e quindi $J(Q_c) \subseteq K(Q_c)$.

Definizione 16. Si dice *grande orbita* di un punto $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ sotto Q_c, l'insieme

$GO(z_0) = \{z \in \overline{\mathbf{C}} :$ esistono m ed n interi non negativi tali che $Q_c^m(z) = Q_c^n(z_0)\}$.

Si nota subito che

$$GO(z_0) = \bigcup_{\zeta\in O(z_0)} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_c^{-k}(\zeta) \right) ,$$

dove $Q_c^{-k}(\zeta)$ è l'insieme di tutti i punti y di $\overline{\mathbf{C}}$ tali che $Q_c^k(y) = \zeta$, ovvero l'insieme di tutte le controimmagini di ordine k del punto ζ.

Una volta introdotta la definizione di grande orbita, è possibile enunciare un'altra proprietà basilare degli insiemi di Julia:

Teorema 17. $J(Q_c)$ *è* completamente invariante *sotto* Q_c*, cioè, se* $z \in J(Q_c)$*, allora*

$$GO(z) \subseteq J(Q_c).$$

Questo teorema afferma l'esistenza di una netta separazione fra l'insieme di Julia e l'insieme di Fatou di un polinomio $z^2 + c$, difatti la completa invarianza di $J(Q_c)$ determina immediatamente la completa invarianza di $F(Q_c)$. La dinamica di un polinomio Q_c su $J(Q_c)$ è decisamente separata dalla dinamica su $F(Q_c)$: un punto di $J(Q_c)$, sotto iterazione, rimane in $J(Q_c)$ ed altrettanto accade per $F(Q_c)$. Il teorema 17 dice di più: lo stesso fenomeno accade anche sotto "retroiterazione" e non solo sotto iterazione.
Andiamo adesso a vedere altre notevoli caratteristiche di un insieme di Julia di un polinomio quadratico, in particolare quelle che riguardano la sua "topologia". Sappiamo già che $J(Q_c)$ è un compatto di $\mathbf{C}$, ma possiamo dire di più:

Proposizione 18. $J(Q_c)$ *è un insieme "perfetto", ovvero è un insieme chiuso e coincide con l'insieme dei suoi punti di accumulazione.*

Dalla proposizione 18 è immediata la

Proposizione 19. $J(Q_c)$ *è infinito, ovvero ha un numero infinito di punti.*

Infine abbiamo che:

Proposizione 20. $J(Q_c)$ *ha parte interna vuota.*

Queste proposizioni rivelano, sebbene in modo sommario, la struttura di un insieme di Julia: esso è scarno e sottile (come si poteva intuire anche dal teorema 15), cionondimeno possiede un numero infinito di punti, nessuno dei quali è isolato dagli altri.

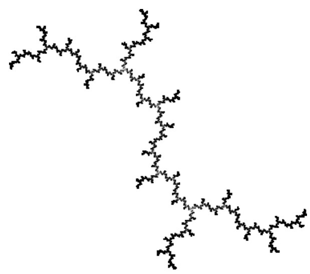

Figura 1: Una rappresentazione grafica dell'insieme $J(Q_c)$ per $c = i$.

Un altro risultato interessante, che si può ottenere dalle considerazioni fatte finora, è una proposizione che, assieme al fatto che $J(Q_c)$ è non vuoto e alla dimostrazione cha abbiamo dato di questo fatto, è elemento basilare per la costruzione di algoritmi per il disegno di insiemi di Julia di polinomi quadratici (vedi ad esempio Figura 1).

Proposizione 21. *Sia $z_0 \in J(Q_c)$. Allora $J(Q_c)$ coincide con la chisura dell'insieme*

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_c^{-k}(z_0).$$

A conclusione della nostra trattazione, torniamo al concetto di caoticità a cui abbiamo accennato a pagina 4. Avevamo detto che Q_c ha comportamento caotico su $J(Q_c)$, senza precisare cosa si intendesse per "comportamento caotico". Lo facciamo adesso.

Definizione 22. Sia S uno spazio topologico. Una funzione $f : S \to S$ è detta *topologicamente transitiva* su S se per ogni coppia di aperti non vuoti A, B di S, esiste k intero non negativo tale che

$$f^k(A) \cap B \neq \emptyset.$$

(Ovviamente f^k indica $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ volte}}$ e ciò vale anche nella definizione successiva).

Definizione 23. Sia (S, d) uno spazio metrico e sia $f : S \to S$ una funzione. Si dice che f ha *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali* su S se esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in S$ e per ogni intorno N di x in S, esiste $y \in N$ ed esiste $n \geq 0$ tali che

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

(L'intorno N è un intorno della topologia indotta dalla metrica).

Definizione 24. Sia S uno spazio metrico e topologico (con la topologia indotta dalla metrica) e sia $f : S \to S$ una funzione. La funzione f è detta *caotica* su S se:

- f ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali su S,
- f è topologicamente transitiva su S e
- i punti periodici di f sono densi in S.

(I punti periodici di una funzione f si definiscono analogamente a quelli dei polinomi complessi).

Muovendo da teoremi e proposizioni precedenti, non è difficile provare il seguente

Teorema 25. *Q_c è caotica su $J(Q_c)$.*

Dimostrazione. Consideriamo su $J(Q_c)$ la metrica indotta da quella euclidea di $\mathbf{C}$ e la topologia indotta da tale metrica (che è la topologia euclidea su $J(Q_c)$). Dato che $J(Q_c)$ è la chiusura dell'insieme dei punti periodici repulsivi di Q_c, allora basta dimostrare la transitività topologica e la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali di Q_c su S.

Dimostriamo per prima la transitività topologica. Siano A, B due aperti non vuoti di $J(Q_c)$. Allora

$$A = U \cap J(Q_c) \text{ e } B = V \cap J(Q_c) \ ,$$

dove U e V sono due aperti di $\mathbf{C}$. Siano $z_0 \in U \cap J(Q_c)$ e $z_1 \in V \cap J(Q_c)$. Sia inoltre $c \neq 0$; dunque, per la proposizione 13 e il teorema 15, esiste $\zeta \in U$ ed esiste m tale che

$$Q_c^m(\zeta) = z_1$$

e inoltre $\zeta \in J(Q_c)$, poiché ζ appartiene alla grande orbita di z_1 e quindi abbiamo finito. Analogo per $c = 0$, poiché z_1 non può essere uguale a zero, visto che $0 \notin J(Q_0)$.

Dimostriamo ora la dipendenza sensibile. Dalla proposizione 19 e dalla definizione di insieme di Julia, è facile provare che $J(Q_c)$ contiene almeno due orbite periodiche repulsive distinte, ciascuna delle quali contenente almeno due punti distinti: le chiamiamo O_1 e O_2. Indichiamo con d la distanza fra le due orbite, cioè

$$d = \min\{|a - b| : \ a \in O_1, \ b \in O_2\}$$

e poniamo $\delta = d/3$. Adesso, scelti arbitrariamente $x \in J(Q_c)$ e N intorno di x in $J(Q_c)$, abbiamo che

$$N = I \cap J(Q_c) \ ,$$

dove I è intorno di x in $\mathbf{C}$. Dalle proposizioni 10 e 13 e dal teorema 15, abbiamo che esiste h_1 ed esiste $y_1 \in I$ tali che

$$Q_c^{h_1}(y_1) \in O_1$$

e inoltre abbiamo che esiste h_2 ed esiste $y_2 \in I$ tali che

$$Q_c^{h_2}(y_2) \in O_2.$$

Ora, y_1 e y_2 appartengono a $J(Q_c)$, poichè appartengono alle grandi orbite di punti di $J(Q_c)$, dunque $y_1, y_2 \in N$. Se per assurdo

$$|Q_c^{h_1 h_2}(x) - Q_c^{h_1 h_2}(y_i)| \leq \delta \qquad \forall i = 1, 2 \ ,$$

allora si avrebbe che

$$\begin{aligned} 3\delta = d = \operatorname{dist}(O_1, O_2) &\leq |Q_c^{h_1 h_2}(y_1) - Q_c^{h_1 h_2}(y_2)| \\ &\leq |Q_c^{h_1 h_2}(y_1) - Q_c^{h_1 h_2}(x)| + |Q_c^{h_1 h_2}(x) - Q_c^{h_1 h_2}(y_2)| \leq 2\delta \ , \end{aligned}$$

da cui $\delta = 0$, il che è assurdo. □

Riferimenti bibliografici

1) R. L. Devaney: *An introduction to chaotic dynamical systems* (Addison-Wesley Publishing Company, 1987)

2) B. Branner, L. Keen, A. Douady, P. Blanchard, J. H. Hubbard, D. Schleicher, R. L. Devaney: *Complex dynamical systems, the mathematics behind the Mandelbrot and Julia sets* (American Mathematical Society, 1994)

3) L. Carleson, T. W. Gamelin: *Complex dynamics* (Springer-Verlag, 1993)

4) J. Milnor: *Dynamics in one complex variable* (Institute for Mathemetical Sciences, SUNY, Stony Brook NY, 1991)