Appunti ad uso degli studenti del Corso di Matematica per CTF

Prof. Sergio Steffè, AA2016/17

Sommario

Questi appunti sono scritti *su misura* per gli studenti del corso di Matematica per CTF dell'Anno Accademico 2016/17, tenendo conto della loro preparazione, e riportando perciò solo alcuni degli argomenti svolti a lezione. Pertanto potrebbero non essere adatti ad altre categorie di studenti.

1 Richiami sui numeri reali

Se A è un insieme di numeri reali, un numero m si dice:

- maggiorante di A se $m \geq a \quad \forall a \in A$.
- minorante di A se $m \leq a \quad \forall a \in A$.
- massimo di A se $m \in A$ ed m è maggiorante di A.
- minimo di A se $m \in A$ ed m è minorante di A.

Un insieme A di numeri reali si dice:

- superiormente limitato se esiste un suo maggiorante.
- inferiormente limitato se esiste un suo minorante.
- limitato se è sia superiormente che inferiormente limitato.

Ricordiamo la definizione di sezione di numeri reali e la sua proprietà fondamentale:

Una coppia di insiemi (A, B) si dice essere una *sezione dei reali* se:

- $A \cup B = \mathbb{R}$
- $\forall a \in A, \forall b \in B \quad a < b$

Se (A, B) è una *sezione dei reali* allora esiste un unico numero z che è o il massimo di A o il minimo di B.

2 Estremo superiore ed estremo inferiore

- IPOTESI:
  Sia A è un insieme di numeri reali superiormente limitato.

- TESI:
  Allora l'insieme $\mathcal{M}$ dei maggioranti di A ha minimo.

- DIMOSTRAZIONE
  Prendiamo la coppia di insiemi $(c\mathcal{M}, \mathcal{M})$. Dimostriamo che è una *sezione dei reali*. E' ovvio che la loro unione sia tutto $\mathbb{R}$. Prendiamo ora un qualsiasi numero $x \in c\mathcal{M}$ e un qualsiasi numero $y \in \mathcal{M}$ e mostriamo che deve essere $x < y$. Infatti x non è un maggiorante di A, e quindi esiste un numero $a \in A$ tale che $x < a$; mentre y è un maggiorante di A e quindi è $a \leq y$. Ne segue appunto che $x < y$.
  Quindi per la proprietà fondamentale delle *sezione dei reali* esiste un numero s che è o massimo di $c\mathcal{M}$ o minimo di $\mathcal{M}$. Facciamo vedere che il primo caso non è possibile. Infatti nel primo caso s non sarebbe un maggiorante di A, e quindi esisterebbe un $a \in A$ tale che $s < a$. Allora il numero $(s + a)/2$ essendo minore di a non sarebbe un maggiorante di A, ma sarebbe maggiore del massimo dei maggioranti s, il che sarebbe assurdo. Questo prova la tesi.

- DEFINIZIONE
  il minimo dei maggioranti di un insieme A superiormente limitato si chiama estremo superiore di A, in formule $\sup(A)$.

- DEFINIZIONE
  in modo perfettamente analogo, il massimo dei minoranti di un insieme A inferiormente limitato si chiama estremo inferiore di A, in formule $\inf(A)$.

3 Teorema degli zeri

- IPOTESI:
  Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$, a valori reali, e supponiamo che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni discordi.

- TESI:
  Allora la funzione f si annulla in almeno un punto di $[a, b]$.

- DIMOSTRAZIONE:
  Usiamo il cosidetto metodo della bisezione.
  Poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Prendiamo $c = (a_1 + b_1)/2$. Calcoliamo $f(c)$.
  Abbiamo queste possibilità:

  – se $f(c) = 0$ allora abbiamo provato il teorema.
  – altrimenti $f(c)$ avrà segno discorde o con $f(a_1)$ o con $f(b_1)$: nel primo caso prendiamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c$; nel secondo caso $a_2 = c$ e $b_2 = b_1$.

  Abbiamo quindi ancora che f è continua sull'intervallo $[a_2, b_2]$ ed ha segni discordi negli estremi dell'intervallo, e la ampiezza dell'intervallo ora è dimezzata.

Ripetiamo questo procedimento più volte. Se nessuno dei punti di mezzo era uno zero della funzione, abbiamo costruito una successione di intervalli di ampiezze di volta in volta dimezzate:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

Prendiamo $\bar{a} = \sup(\{a_1, a_2, a_3, \dots\})$ e $\bar{b} = \inf(\{b_1, b_2, b_3, \dots\})$ Allora dimostriamo che $\bar{a} = \bar{b}$ e che $f(\bar{a}) = 0$.
Infatti siccome tutti i punti $a_1, a_2, a_3, \dots$ sono minori di tutti i punti $b_1, b_2, b_3, \dots$, risulta $\bar{a} \leq \bar{b}$. Ora se valesse il minore stretto, avremmo un intevallo $[\bar{a}, \bar{b}]$ di ampiezza positiva ma incluso in tutti gli intervalli $[a_n, b_n]$ e questo non è possibile perchè le ampiezze di tali intervalli vengono dimezzate ad ogni passo e diventano piccole a piacere. Quindi $\bar{a} = \bar{b}$.
Se ora $f(\bar{a})$ non fosse nullo, per il teorema della permanenza del segno esisterebbe un intorno di $\bar{a}$ in cui f avrebbe lo stesso segno di $f(\bar{a})$. Ma allora per un numero di suddivisioni sufficientemente alto un intervallo $[a_n, b_n]$ cadrebbe in tale intorno e non sarebbe verificato il fatto di avere per f valori di segno discorde sui due estremi di $[a_n, b_n]$.

4 Teorema di Weierstrass

- IPOTESI:
  Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$, a valori reali.

- TESI:
  Allora la funzione f ha massimo e minimo e assume tutti i valori compresi.

- DIMOSTRAZIONE:
  Prima di tutto facciamo vedere che f è limitata su $[a, b]$.
  Sia $W = \{v | f$ è limitata nell'intervallo $[a, v]\} \subseteq [a, b]$. Poichè la funzione f è continua, esiste un intorno del punto a in cui è limitata, e quindi l'insieme W contiene almeno il punto a e un intorno destro di tale punto.

  Sia $w = \sup(W)$. Facciamo vedere che $w = b$.
  Sappiamo dunque che $a < w \leq b$. Se per assurdo w non fosse uguale a b, allora poichè f è continua in w, esisterebbe un intorno di w in cui f sarebbe limitata, e quindi risulterebbe limitata in un intervallo un pochino più grande di $[a, w]$, e questo contraddice $w = \sup(W)$. Quindi $w = b$. Per la continutà di f in b, f risulta limitata in in un intorno di b, diciamo $[b - \delta, b]$ e poichè $b - \delta < w$ risulta anche limitatata in $[a, b - \delta]$ e quindi in definitiva è limitata anche in tutto $[a, b]$.

  A questo punto consideriamo l'insieme $f([a, b])$; abbiamo appena dimostrato che esso è limitato; quindi $M = \sup(f([a, b]))$ e $m = \inf(f([a, b]))$ esistono finiti.

  Facciamo vedere che M è un massimo usando una tecnica di bisezione dell'intervallo.

  Poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Prendiamo $c = (a_1 + b_1)/2$. Consideriamo la funzione f nei due intervalli $[a_1, c]$ e $[c, b_1]$. Siccome la funzione era superiormente limitata su $[a, b]$, è anche superiormente limitata sui due sottointervalli, e quindi esistono finiti anche $M_1 = \sup(f([a_1, c]))$

e $M_2 = \sup(f([c, b_1]))$ ed è $M_1 \leq M$ e $M_2 \leq M$. Non possono essere tutte e due disuguaglianze strette, perchè ovviamente deve essere $M = max(M_1, M_2)$ Scegliamo allora uno dei due intervalli per cui valga la uguaglianza e ribattezziamo $[a_2, b_2]$ i suoi due estremi.
Si ripete questo ragionamento più volte, ottenendo una sucessione di intervalli di ampiezze ogni volta dimezzate:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

con la proprietà che

$$M = sup(f([a_n, b_n]))$$

Prendiamo $\bar{a} = \sup(\{a_1, a_2, a_3, \dots\})$ e $\bar{b} = \inf(\{b_1, b_2, b_3, \dots\})$ e dimostriamo che $\bar{a} = \bar{b}$ e che $f(\bar{a}) = 0$.
Infatti siccome tutti i punti $a_1, a_2, a_3, \dots$ sono minori di tutti i punti $b_1, b_2, b_3, \dots$, risulta $\bar{a} \leq \bar{b}$. Ora se valesse il minore stretto, avremmo un intevallo $[\bar{a}, \bar{b}]$ di ampiezza positiva ma incluso in tutti gli intervalli $[a_n, b_n]$ e questo non è possibile perchè le ampiezze di tali intervalli vengono dimezzate ad ogni passo e diventano piccole a piacere. Quindi $\bar{a} = \bar{b}$.
Ora $f(\bar{a}) = M$. Vale infatti $f(\bar{a}) \leq M$ e se valesse il minore stretto, allora detto $\epsilon = M - f(\bar{a})$, per la continuità di f esisterebbe un intero intorno di $\bar{a}$ per i cui punti x sarebbe ancora $f(x) < M - \epsilon/2$. Ma allora per un numero di suddivisioni sufficientemente alto un intervallo $[a_n, b_n]$ cadrebbe in tale intorno e non sarebbe verificato il fatto di avere $sup(f([a_n, b_n])) = M$.
Quindi abbiamo trovato un punto dell'intervallo $[a, b]$ in cui il valore della funzione è uguale all'estremo superiore, cioè appunto un punto di massimo, e quindi l'estremo superiore stesso è un massimo.
Discorso analogo per il minimo.

Detti dunque M e m rispettivamente il valore massimo e minimo assunti dalla funzione f nell'intervallo $[a, b]$, resta solo da dimostrare che f assume tutti i valori intermedi.
Prendiamo dunque un valore intermedio v:

$$m < v < M$$

Consideriamo la funzione g definita in $[a, b]$ dalla formula

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) = f(x) - v$$

Siano c un punto di massimo e d un punto di minimo di f, e consideriamo il sottointervallo $[min(c, d), max(c, d)] \subseteq [a, b]$.
Risulta che g ha segni discordi sugli estremi di tale intervallo, e quindi per il teorema degli zeri esiste un punto $c \in [a, b]$ in cui si ha $g(c) = 0$ e cioè $f(c) - v = 0$ ovvero $f(c) = v$ che è quello che si voleva dimostrare.