Appunti ad uso degli studenti del Corso di Matematica per CTF

Prof. Sergio Steffè, AA2016/17

Sommario

Questi appunti sono scritti *su misura* per gli studenti del corso di Matematica per CTF dell'Anno Accademico 2016/17, tenendo conto della loro preparazione, e riportanto perciò solo alcuni degli argomenti svolti a lezione. Pertanto potrebbero non essere adatti ad altre categorie di studenti.

1 *Calculus* e integrazione

Il *Calculus*, cioè il calcolo diffrerenziale ed integrale, ha oramai circa 300 anni. Quello che viene oggi insegnato nelle scuole medie superiori e nei primi corsi universitari era già noto ai dotti dell'epoca di Newton e Leibnitz, ed era usato per fare i calcoli, come per esempio per il calcolo delle orbite dei corpi celesti, che richiede la risoluzione di equazioni differenziali.
Abbiamo già visto alcuni risultati sulla derivazione, almeno nel caso delle funzioni di una variabile. Vediamo ora, sempre nel caso monodimensionale, qualche risultato sulla integrazione.
Il simbolo dell'integrale è una **s** stilizzata, $\int$, abbreviazione di "somma".
La parte della teoria della integrazione che è cambiata molto negli ultimi 300 anni è quella che riguarda il modo di definire l'integrale, così da estendere a quante più funzioni possibili la definizione di "funzione integrabile" conservando le relative proprietà tanto utili per i calcoli.
Sono stati sopratutto il calcolo delle probabilità e dei processi stocastici, e i problemi legati alle equazioni differenziali alle derivate parziali a motivare la richiesta di maggiore generalità.
Le definizioni originali usate da Newton e Leibnitz sono state poi formalizzate da Peano e Jordan, e poi estese da Lebesgue portando alla teoria della misura astratta e al moderno concetto di probabilità.

2 Proprietà dell'integrale definito in una variabile

Non vogliamo qui dare una completa definizione di integrale, ne diamo solo un cenno nel successivo paragrafo.
Per le funzioni abbastanza regolari le varie definizioni portano comunque allo stesso risultato e cioè ad un integrale definito su una certa classe di funzioni (*funzioni integrabili*), con le seguenti proprietà:

1. *monotonia*: se f e g sono funzioni integrabili definite su $[a, b]$ allora

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2. $\int_a^b \quad 0 \quad dx = 0$

3. $\int_a^b \quad 1 \quad dx = b - a$

4. *linearità*: se α e β sono costanti e f e g funzioni integrabili su $[a, b]$ allora

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

5. se f è definita e integrabile su $[a, c]$ e $b \in (a, c)$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

6. *continuità*:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq |\int_a^b |f(x)|dx|$$

7. *estensione* agli intervalli vuoti e al caso degli estremi invertiti ($a < b$):

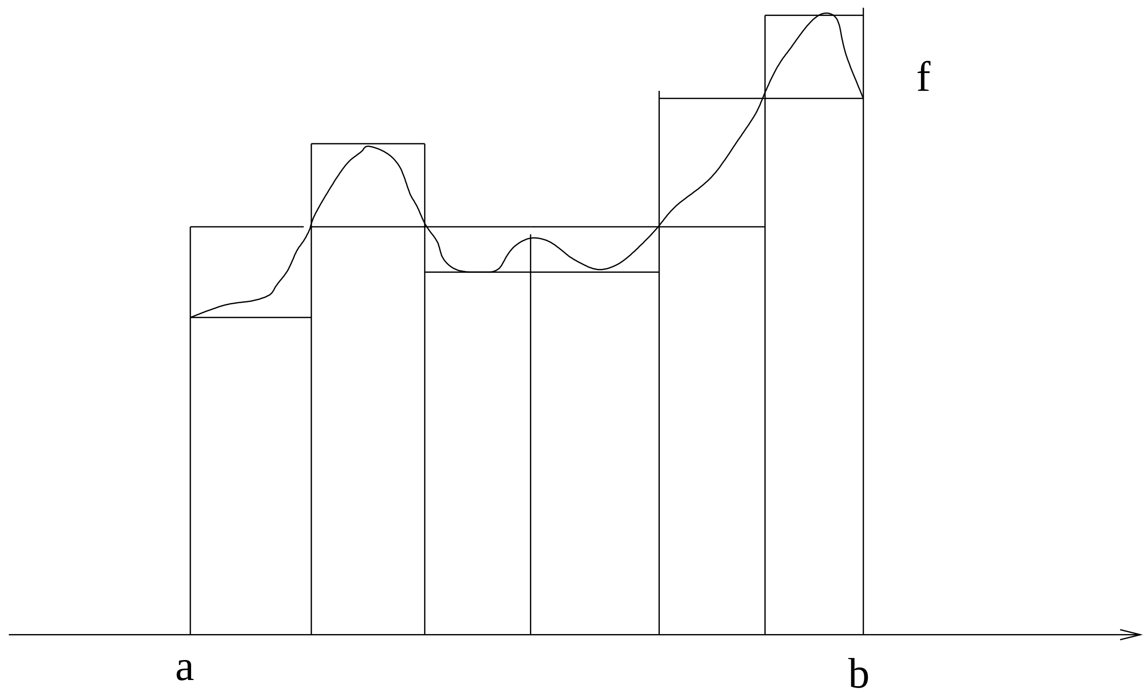
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

3 Integrabilità elementare

Diamo solo una idea del metodo elementare usato per definire l'integrale.
Si inzia a definire l'integrale per le cosidette funzioni semplici, cioè per le funzioni costanti a tratti su un intervallo chiuso e limitato.
Per queste funzioni la definizione di integrale e la verifica delle proprietà sono molto facili.

Successivamente si cerca di approssimare le funzioni da sotto e da sopra mediante funzioni semplici, come illustrato in figura:



Si definiscono rispettivamente l'integrale da sotto di f su $[a, b]$ come l'estremo superiore degli integrali delle funzioni semplici minoranti f e l'integrale da sopra di f su $[a, b]$ come l'estremo inferiore degli integrali delle funzioni semplici maggioranti f.
Le funzioni integrabili sono allora quelle per cui integrale da sotto e integrale da sopra coincidono.
Questo assicura la effettiva calcolabilità numerica dell'integrale, visto che gli integrali delle funzioni semplici sono facilmente calcolabili numericamente.

Questo modo di definire l'integrale è molto intuitivo, garantisce l'integrabilità di ampie classi di funzioni regolari, comprendenti oltre alle funzioni semplici le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati, le funzioni monotone, e le loro combinazioni, ma ha anche parecchie limitazioni.

Per i nostri scopi è comunque sufficiente, per cui partiamo da questo punto (e cioè come se avessimo dato la completa definizione e dimostrato l'integrabilità delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato) per dimostrare i teoremi che ci servono per il calcolo integrale.

4 Teorema della media integrale

Se f è una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$ con minimo m e massimo M sull'intervallo, allora vale il teorema della media integrale:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

che si può anche enunciare dicendo che esiste uno $\xi \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

La quantità a sinistra viene appunto chiamata *media integrale* della funzione f sull'intervallo $[a, b]$.
dimostrazione:
si ottiene semplicemente dalla disuguaglianza $m \leq f(x) \leq M$, integrando tra a e b, e ricordando che una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori tra il minimo e il massimo.

5 Teorema fondamentale del calcolo integrale: prima parte

Se f è una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$, definita F la *funzione integrale* di f su $[a, b]$:

$$\forall x \in [a, b] \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

si ha che

$$\forall x \in [a, b] \quad F'(x) = f(x)$$

dimostrazione:
Per ogni punto $x \in [a, b]$ calcoliamo il rapporto incrementale di F (ove h è un valore diverso da 0 e tale che $x + h \in [a, b]$):

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Per il teorema della media integrale esiste allora un punto ξ compreso tra x e $x + h$ tale che:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$$

Se ora si calcola il limite per $h \to 0$ si ha che $\xi \to x$ e per la continutà di f si ha la tesi.

6 Le primitive

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di f una qualsiasi funzione H tale che

$$H' = f$$

nota: si può pensare ad una primitiva come ad una soluzione della equazione differenziale $H' = f$.

Un primo risultato interessante è il seguente:

Se f è continua su $[a, b]$ e H, G sono due primitive di f, allora H e G differiscono per una costante su $[a, b]$.

dimostrazione:
Consideriamo la funzione $K = H - G$. Per la definizione di primitiva, abbiamo che sull'intervallo $[a, b]$:

$$K' = H' - G' = f - f = 0$$

Allora per il teorema di Lagrange, abbiamo che per ogni $x \in [a, b]$ esiste un $\xi \in [a, x]$ tale che:

$$\frac{K(x) - K(a)}{x - a} = K'(\xi) = 0$$

e quindi nell'intervallo $[a, b]$ K vale sempre $K(a)$, cioè è costante.

Ora la prima parte del teorema fondamentale del calcolo integrale può essere enunciata dicendo che se f è continua su $[a, b]$ allora la funzione integrale è una primitiva di f, e quindi possimo caratterizzare tutte le primitive di f, dicendo che:

Se H è una primitiva di una funzione f continua su $[a, b]$ allora esiste una costante C tale che:

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

7 Teorema fondamentale del calcolo integrale: seconda parte

Se H è una primitiva di una funzione f continua su $[a, b]$ allora possiamo calcolare l'integrale di f su $[a, b]$ con la formula:

$$\int_a^b f(t)dt = H(b) - H(a)$$

dimostrazione:
Sappiamo che esiste una costante C tale che:

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

prendendo $x = a$ e $x = b$ otteniamo:

$$H(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C$$

$$H(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$

da cui la tesi.

8 Integrazione delle funzioni elementari

Si può ora intepretare le tabelle delle derivate delle funzioni elementari come tabelle delle primitive delle funzioni elementari.

9 integrazione per parti

La formula mnemonica per ricordarsi l'integrazione per parti è la seguente:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

che nelle applicazioni, si espande a:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\ dx$$

La dimostrazione è molto semplice ed utilizza la formula per la derivata di un prodotto di due funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale. Se u e v sono due funzioni derivabili sull'intervallo $[a, b]$, abbiamo:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Da questa formula si evince che uv è una primitiva della espressione a destra della uguaglianza, e quindi si ha:

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

da cui il teorema.

10 cambiamento di variabili

Il metodo di integrazione per sostituzione o anche di cambiamento di variabili segue dalla formula di derivazione delle funzioni composte e dal teorema fondamentale del calcolo integrale. Se f è una funzione continua su un intervallo e F una sua primitiva, abbiamo $F' = f$. Se g è una funzione continua derivabile e bigettiva, allora preso

$$\Psi(x) = F(g(x))$$

è

$$\Psi'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Che dice che $\Psi(x)$ è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$.
In termini di integrali possiamo allora scrivere:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \Psi(x) = F(g(x)) = \left(\int f(y)dy\right)\Big|_{y=g(x)}$$

Quando si vuole applicare questa formula agli integrali definiti, occorre stare attenti a mettere al loro posto i vari estremi di integrazione.
Se $g : [a, b] \to [c, d]$ con $g(a) = c$ e $g(b) = d$ allora abbiamo:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_c^d f(y)dy$$

e se $g(a) = d$ e $g(b) = c$ allora:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_d^c f(y)dy$$

Si noti che allora g' è negativa per cui le due formule possono anche scriversi così:

$$\int_a^b f(g(x))|g'(x)|dx = \int_c^d f(y)dy$$

11 estensioni

Si può cercare di estendere la definzione di integrale ad alcuni casi di dominii illimitati e di funzioni illimitate, ma si deve stare attenti al fatto che questi integrali estesi **non** godono di tutte le proprietà degli integrali.
Itegrale su un intervallo illimitato $[a, +\inf)$:

$$\int_a^{+\inf} f(x)dx = \lim_{z \to +\inf} \int_a^z f(x)dx$$

Integrale per una funzione illimitata nel punto b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{z \to b} \int_a^z f(x)dx$$

Se il calcolo di un integrale necessita di più estensioni, occorre spezzare l'integrale in modo che ogni termine sia calcolabile con una sola estensione.

Per esempio per calcolare

$$\int_{-\inf}^{+\inf} f(x)dx$$

si devono calcolare separatamente

$$\int_{-\inf}^{0} f(x)dx$$

e

$$\int_{0}^{+\inf} f(x)dx$$

che vanno poi sommati, ammesso che sia possibile (uno dei due potrebbe non esistere oppure potrebbero venire uno $+\inf$ e l'altro $-\inf$.